

Logarithme décimal et sa réciproque

« On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres : mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison. »

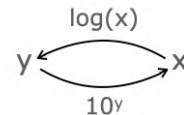
1- Définition mathématique

Soit un nombre réel strictement positif $x > 0$. On peut écrire x sous forme de puissance de 10 : il existe un unique réel y tel que $x = 10^y$.

Ce nombre y se déduit de x grâce au **logarithme décimal** (noté $\log$) : $y = \log(x)$

$$\text{On a donc } y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$$

Ainsi, les fonctions $\log(x)$ et 10^x sont **réciproques** l'une de l'autre.



2- Propriétés

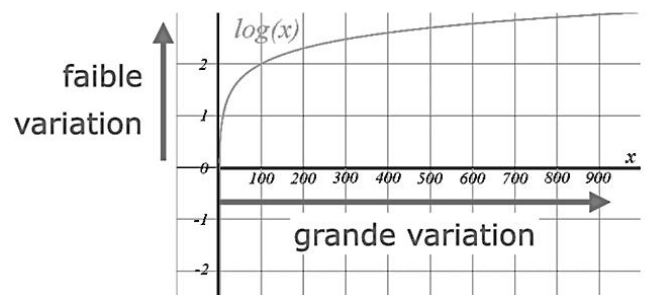
a et b sont des réels strictement positifs

$$\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log(100) = 2, \log(1000) = 3$$

$$\log(10^a) = a$$

$$\log(a \times b) = \log a + \log b \quad \log(a^b) = b \times \log(a)$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$



3- Utilisation

Le logarithme décimal est particulièrement utile pour exprimer et comparer des **ordres de grandeurs**.

Exemple : le nombre d'Avogadro vaut : $N_a = 6,02 \times 10^{23}$

L'ordre de grandeur est donné par la puissance de 10 la plus proche : $\log(N_a) = 23,8 \approx 24 \Rightarrow N_a \approx 10^{24}$

La représentation logarithmique est aussi plus adaptée lorsqu'on souhaite représenter des données très dispersées, couvrant plusieurs puissances de 10.

Exemple : on souhaite représenter les prix de neuf voitures :

- Occasion :

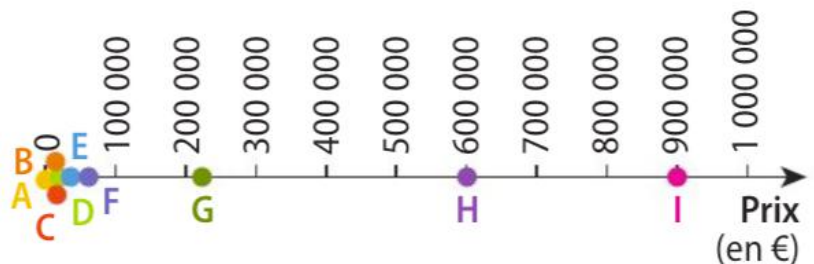
$A = 3\,000\,€$; $B = 5\,000\,€$; $C = 7\,500\,€$

- Neuve :

$D = 18\,000\,€$; $E = 34\,000\,€$; $F = 65\,000\,€$

- Luxe :

$G = 220\,000\,€$; $H = 600\,000\,€$; $I = 900\,000\,€$

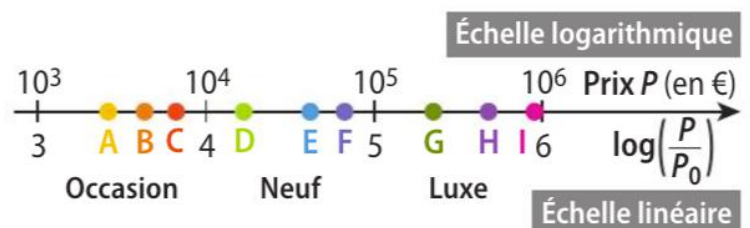


Sur une échelle linéaire, tous les points d'« occasion » sont serrés à gauche, tandis que les modèles « luxe » sont très espacés. La lecture devient difficile.

Pour rendre la répartition **lisible**, on définit la grandeur $H = \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$ avec $P_0 = 1€$

On obtient alors trois intervalles de **même longueur** :

- Occasion : 10^3 à $10^4€$
- Neuf : 10^4 à $10^5€$
- Luxe : 10^5 à $10^6€$



Ainsi, une **échelle logarithmique** permet de représenter les **neuf valeurs de façon équilibrée et plus lisible**.

Exemple d'utilisation en physique : le niveau sonore

L'intensité sonore perceptible par l'oreille humaine varie d'environ $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ (seuil d'audibilité) à environ 100 W.m^{-2} (avion au décollage).

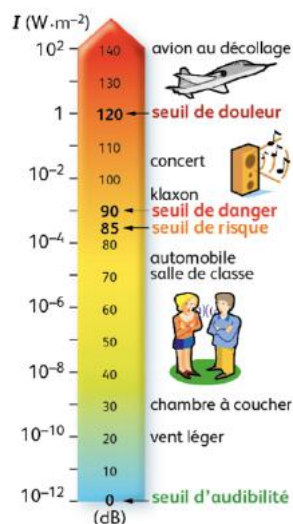
Cette plage de valeurs étant **très étendue**, il est difficile de la représenter sur une **échelle linéaire**.

On utilise donc une **échelle logarithmique** : le **niveau sonore**.

 Définition du niveau sonore

Le niveau sonore L , exprimé en décibels (dB), est défini par : $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ où I est l'intensité sonore

considérée et $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$



 Exemple de calcul

On considère une intensité : $I = 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}$. On calcule :

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{10^{-8}}{10^{-12}} \right) = 10 \log(10^4) = 10 \times 4 \times \log(10^1) = 40 \times 1 = 40 \text{ dB}$$

On dit tout simplement : $L = 40 \text{ dB}$

Exemple d'utilisation en chimie : le pH

Notation : dans ce qui suit, la concentration molaire d'une espèce chimique A est notée $[A]$.

Les solutions manipulées au laboratoire sont généralement **peu concentrées** : la valeur de $[A]$ peut varier typiquement de $10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ à 1 mol.L^{-1}

L'acidité d'une solution est liée à la présence des **ions oxonium** H_3O^+ .

Même une **faible concentration** de ces ions suffit à rendre une solution acide.

 pH : une échelle logarithmique

L'échelle du pH n'utilise pas directement $[\text{H}_3\text{O}^+]$, mais son **logarithme décimal** : $\text{pH} = -\log \left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^0} \right)$ où $C^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ est la concentration standard ou de référence. Cette relation peut s'inverser : $\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^0} = 10^{-\text{pH}}$

Exemples : si $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ alors $\text{pH} = 2$

si $\text{pH} = 8,5$, alors $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8,5} \text{ mol.L}^{-1} = 3,2 \times 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$

 Idée clé

Le pH traduit l'acidité **sur une échelle logarithmique**, ce qui permet de représenter facilement des concentrations d'ions H_3O^+ pouvant varier sur plusieurs **ordres de grandeur**.

