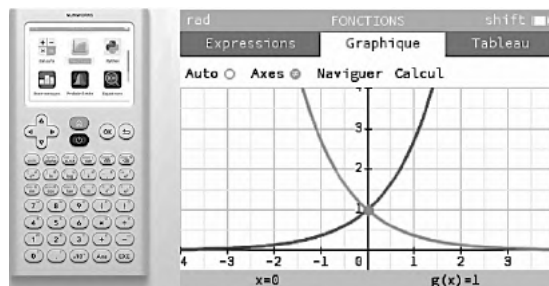
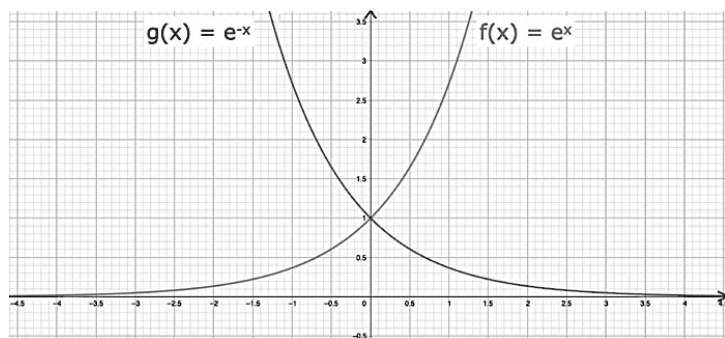


Équation différentielle

« En apprenant, on entrevoit l'étendue de notre ignorance. »

1- Allure des fonctions exponentielles



En utilisant votre calculatrice, trouver l'allure des fonctions exponentielles suivantes : e^x , e^{-x} , $2e^{-x}$, $-e^{-x}$, $1 - e^{-x}$

2- Rappels de la notation Leibniz de dérivée

La dérivée d'une fonction f en un point x_0 correspond à la variation infinitésimale de f (notée « df ») par rapport à une variation infinitésimale de x (notée « dx ») de x autour de x_0 .

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x = x_0)$$

3- Équation différentielle

	Mathématiques	Physique-chimie
Variable	x	t
Fonction	y	G
Dérivée	y'	$\frac{dG}{dt}$
Équation différentielle	$y' = ay + b$	$\frac{dG}{dt} = aG + b$

A. Définition

Soit $G(t)$ une grandeur physique ou chimique qui dépend du temps t , et qui est **dérivable** par rapport à ce temps.

Une **équation différentielle** est une équation qui fait intervenir à la fois une grandeur $G(t)$ et sa **dérivée** par rapport au temps, notée : $\frac{dG}{dt}$

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** s'écrit sous la forme :

$$\frac{dG}{dt} = a \times G + b \quad \textcircled{1}$$

où **a** et **b** sont deux constantes réelles **indépendantes du temps t**.

👉 On parle d'équation du **premier ordre** car seule la dérivée première de G intervient.

📊 L'égalité $\textcircled{1}$ est **homogène en unités** :

- le membre de gauche, $\frac{dG}{dt}$, a l'unité de G divisée par des secondes ;
- le terme $a \times G$ a donc l'unité de $G \times s^{-1} \rightarrow$ **l'unité de a est s^{-1}** ;
- le terme **b** doit donc aussi avoir l'unité de $G \times s^{-1}$.

Ce type d'équation apparaît dans de nombreux phénomènes physiques ou chimiques. (voir applications 2 et 3 ci-dessous)

🧊 Exemple (refroidissement d'un objet) :

Lorsqu'un solide de température T est plongé dans un fluide maintenu à température constante T_0 , la température $T(t)$ du solide évolue dans le temps selon la loi : $\frac{dT}{dt} = \alpha (T_0 - T)$ où α est une constante positive caractéristique du système (en s^{-1}).

🧊 C'est la **loi de refroidissement de Newton**, une loi classique de la thermodynamique.

B. Résolution



Résoudre une telle équation consiste à déterminer **la fonction** $G(t)$ qui vérifie cette égalité pour tout instant t .

Théorème : l'équation $\frac{dG}{dt} = a \times G + b$ a pour solution $G(t) = c \times e^{a \times t} - \frac{b}{a}$ où c est une constante réelle.

Cette constante c se détermine à partir de la **condition initiale**.

Application 1 : Equation différentielle

On considère l'équation différentielle : $\frac{dG}{dt} = a \times G + b$

- 1 – Montrer que la fonction $G(t) = c \times e^{a \times t} - \frac{b}{a}$ est solution de cette équation différentielle
- 2 – On note G_0 la valeur de G à l'instant $t = 0$. Exprimer la constante c en fonction de G_0 , a et b
- 3 – Donner la solution de l'équation différentielle : $\frac{dG}{dt} + 5 \times G = 0$ sachant la condition initiale est : $G(0) = 3$
- 4 – Considérons maintenant l'équation $2 \times \frac{dG}{dt} - 8 \times G = 5$.
 - a) La mettre sous la forme canonique : $\frac{dG}{dt} = a \times G + b$ et déterminer les constantes a et b .
 - b) Résoudre ensuite cette équation différentielle.

Application 2 : Loi thermique de Newton (thermodynamique)

Lorsqu'un solide de température T_i est plongé dans un fluide à température constante T_0 , sa température $T(t)$ évolue dans le temps selon la l'équation différentielle : $\frac{dT}{dt} = \alpha (T_0 - T)$ où α est une constante positive caractéristique du système (en s^{-1}).

 Cela signifie que la variation de température est proportionnelle à l'écart entre la température du solide et celle du fluide.

- 1 - Résoudre cette équation pour obtenir l'expression de $T(t)$ en fonction de temps, de la température initiale (température à $t = 0$) T_i , de la température du fluide T_0 , et du coefficient α .
- 2 - À partir de l'expression obtenue, déterminer la température du solide :
 - à l'instant initial ($t = 0$) ;
 - lorsque $t \rightarrow +\infty$ (après une durée très longue)
- 3 - Représenter graphiquement l'allure de la courbe $T(t)$, c'est-à-dire l'évolution de la température du solide en fonction du temps.

Application 3 : Loi de charge d'un condensateur

Lors de la charge d'un condensateur de capacité C par un générateur de tension E , la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u = \frac{E}{RC}$$

où E , R et C sont des constantes indépendantes du temps.

Déterminer l'expression de $u(t)$, en tenant compte de la condition initiale : $u(0) = 0$.

