

Dérivée d'une fonction – notation de Leibniz

« Pas de science sans patience. »

1 - Taux de variation moyen

Une **variation** mesurable d'une grandeur G , à l'échelle macroscopique, est notée en précédant son symbole de la lettre grecque delta « Δ ».

La variation d'une grandeur correspond toujours à la valeur finale moins la valeur initiale :

$$\Delta G = G_{\text{final}} - G_{\text{initial}}$$

Le **taux de variation moyen** de la grandeur $G(t)$ entre t et $t + \Delta t$ est le rapport : $\frac{\Delta G(t)}{\Delta t} = \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t}$

 **Application 1** : taux de variation moyen de la position = vitesse moyenne

Éloïse consulte son téléphone pour connaître le temps de trajet en tram jusqu'à la place de la Comédie : 26 minutes pour 13,8 km. Quelle est la vitesse moyenne du tram sur ce parcours, en m.s^{-1} ?

2 - Taux de variation instantané et dérivée

Plus on réduit la durée Δt , plus le taux de variation s'approche du **taux instantané**, c'est-à-dire de la **dérivée**.

À la limite, on a $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} = G'(t)$

Cette expression est à rapprocher de la notation de la dérivée utilisée en mathématiques avec un « prime »

3 - Notation de Leibniz de la dérivée

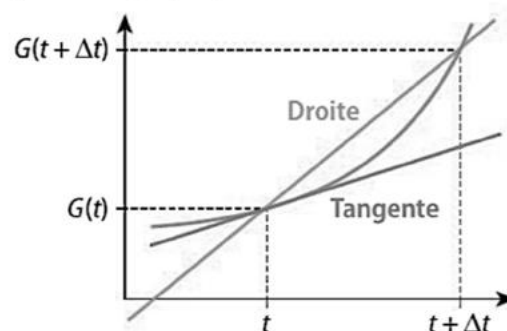
La notation de Leibniz pour la dérivée est plus générale que la notation « prime » (ex. $f'(t)$) utilisée en terminale.

Elle repose sur l'idée de variations infinitésimales : au lieu d'utiliser le symbole Δ pour une variation mesurable, on utilise une lettre « d » minuscule pour désigner une **variation infiniment petite**.

Par exemple, une variation infinitésimale de temps se note **dt**, et celle d'une grandeur G se note **dG**.

Remarque : comme pour ΔG , on ne peut pas séparer d de G dans l'écriture dG .

Interprétation graphique



- Le taux de variation est le **coefficient directeur** de la droite passant par les points de dates t et $t + \Delta t$.
- Lorsque Δt tend vers zéro, la droite en haut se rapproche de la droite **tangente**, en bas.
- La dérivée est le **coefficient directeur** de la **tangente** à la courbe au point de date t .

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G(t)}{\Delta t} = \frac{dG(t)}{dt} = \text{« dérivée de } G \text{ en fonction de } t \text{ » en physique}$$

Avantages de la notation de Leibniz :

- Elle **montre visuellement** qu'une dérivée est un **taux de variation infinitésimal**.
- Elle **indique clairement la variable par rapport à laquelle on dérive**, ce qui est essentiel lorsque la fonction dépend de plusieurs variables.

Dans l'enseignement supérieur, on rencontre des fonctions qui dépendent de **plusieurs variables** : x_1, x_2 , etc...

Dans ce cas, la **notation « prime »** ($f'(x)$) devient insuffisante : on doit préciser la variable de dérivation, ce que permet la **notation de Leibniz** (ex. $\frac{dT}{dt}$, $\frac{dT}{dx}$).

Exemple en physique :

On chauffe une barre de fer. La **température** T mesurée dépend :

- de la **position** x du point de mesure sur la barre,
- et du **temps** t écoulé depuis le début du chauffage.

On a donc une fonction à deux variables : $T = T(x, t)$

Par exemple, si on mesure la température au point $x = a$ et à $t = 20$ s, on peut écrire :

$$T(x = a, t = 20 \text{ s}) = 309 \text{ K}$$

On peut alors s'intéresser :

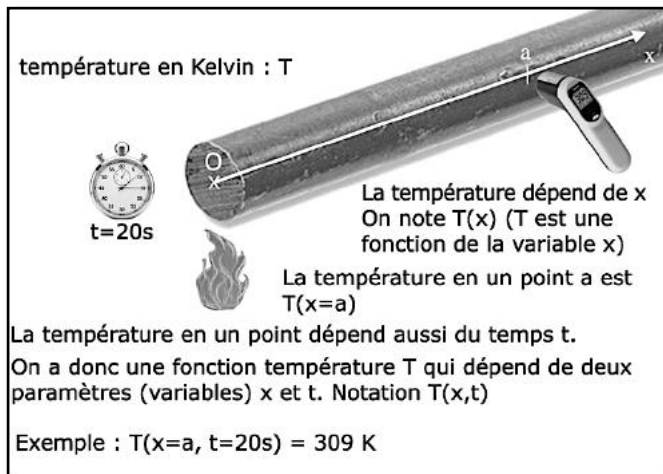
- à la **variation de la température dans l'espace** $\rightarrow \frac{dT}{dx}$
- ou à la **variation de la température dans le temps** $\rightarrow \frac{dT}{dt}$

C'est pourquoi, en physique, on **privilégie la notation de Leibniz**, plus rigoureuse et adaptée à ces situations.

 **Application 2** : cinétique chimique - vitesse de disparition d'une espèce dans une réaction

La concentration d'une espèce dans un bécher évolue au cours du temps selon la loi $c(t) = \frac{C_0}{1 + k t}$ pour $t \in [0 ; +\infty[$ avec $C_0 = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$ et k une constante de valeur $k = 0,10 \text{ s}^{-1}$.

La vitesse volumique de disparition de cette espèce chimique à la date t a pour *expression* $V_D(t) = -\frac{dc}{dt}(t)$, elle est exprimée en $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Déterminer la vitesse volumique d'apparition à la date $t = 10\text{s}$.

**Résumé**

<i>Math (en terminale)</i>	<i>Physique (en terminale)</i> <i>Math (supérieur)</i>
variable x	grandeurs qui varient $t, x, \dots$
fonction $y = f(x)$	grandeurs qu'on observe ou qu'on mesure en fonction d'une grandeur qui varie vitesse(t), position(t)
dérivée de f au point $x=a$ $f'(a)$	$\frac{dT}{dx}(a)$ $\frac{dT}{dt}(20\text{s})$ On explicite par rapport à quelle variable on dérive
Le signe de $f'(a)$ permet de savoir si la fonction est croissante, décroissante ou stable au point a quand x augmente	Le signe de $\frac{dT}{dx}(a)$ permet de savoir si la température augmente, diminue ou est stable au point a quand x augmente