Mécanique des fluides

« Comprendre un écoulement, c'est suivre le voyage de l'énergie dans le fluide. »

I. Loi fondamentale de la statique des fluides

Dans un fluide au repos, la pression varie en fonction de l'altitude z.

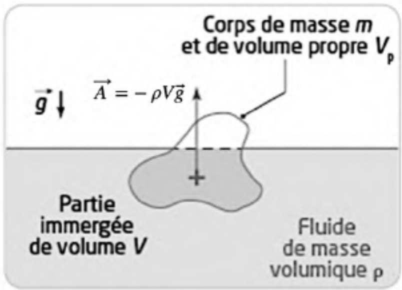
Cette variation est donnée par la loi fondamentale de la statique des fluides :

$$\boxed{P_2 - P_1 = -\rho\, g\, (z_2 - z_1)}$$

- avec : P_1 et P_2 les pressions aux altitudes respectives z_1 et z_2,
- ρ la masse volumique du fluide et
- g l'intensité de la pesanteur

Ainsi, plus on descend dans le fluide (donc plus l'altitude z diminue), plus la pression augmente.

II. Poussée d'Archimède



La poussée d'Archimède, notée $\vec{A}$, est la résultante **des forces de pression exercées par un fluide au repos sur la partie immergée d'un corps** (solide ou fluide). Elle est dirigée vers le haut et sa valeur est égale au poids du fluide déplacé. Elle s'exerce au centre de masse de la partie immergée du solide, appelé centre de poussée (point C).

Remarque : Le volume de fluide déplacé correspond au volume de la partie immergée du corps, noté V.

La poussée d'Archimède s' écrit :

$$\vec{A} = -\rho V \vec{g} = -m\vec{g} \quad \text{avec} \begin{cases} \rho \text{ la masse volumique du fluide en kg.m}^{-3} \text{ (ou kg.L}^{-1}) \\ V \text{ le volume de fluide déplacé en m}^3 \text{ (ou L)} \\ g = 9{,}81\ \text{N.kg}^{-1} \end{cases}$$

Application 1 : Pierre ponce

La pierre ponce est une roche volcanique poreuse dont la masse volumique moyenne peut être inférieure à celle de l'eau. Un cube de pierre ponce de côté c = 3,1 cm a pour masse m = 27 g.

1. Calculer le volume V du cube et en déduire la masse volumique ρ_{pp} de la pierre ponce.
2. On plonge entièrement le cube dans l'eau douce.

a. Déterminer le poids $\vec{P}$ et la poussée d'Archimède $\vec{A}$ subies par le cube.

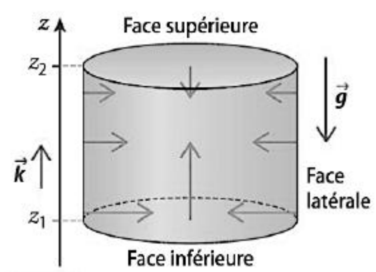
b. On lâche le cube. Va-t-il remonter à la surface ou couler ?

Application 2 : Origine de la poussée d'Archimède

On considère un cylindre d'axe vertical, de hauteur h, de section d'aire S et de volume V = Sh, entièrement immergé dans un fluide incompressible de masse volumique ρ.

Le fluide est soumis à un champ de pesanteur uniforme : $\vec{g} = -g\vec{k}$

La face inférieure du cylindre est située à l'altitude z_1 et la face supérieure à l'altitude z_2.



a. Pourquoi les forces pressantes exercées par le fluide sur la face latérale du cylindre se compensent-elles ? En déduire la résultante des forces pressantes exercées sur la surface latérale du cylindre.

Soient P_1 et P_2 les pressions sur les faces inférieure et supérieure du cylindre.

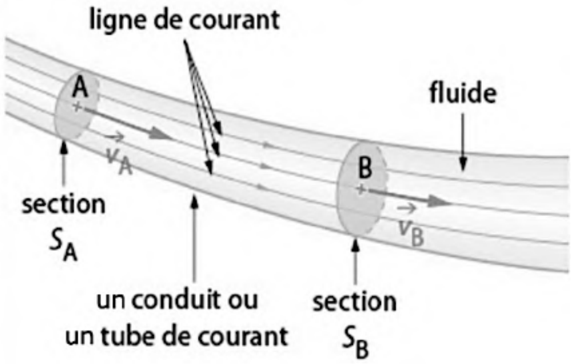
c. Exprimer la résultante des forces pressantes sur le cylindre en fonction de S, P_1 et P_2

d. En appliquant la loi fondamentale de la statique des fluides, retrouver l'expression de la poussée d'Archimède

III. Écoulement permanent d'un fluide incompressible

Un fluide **incompressible** est un fluide (liquide ou gaz) dont la masse volumique ne varie pas au cours du mouvement.

Pour représenter l'écoulement d'un fluide, on utilise des **lignes de courant**. Ces courbes indiquent la direction suivie par le fluide. En chaque point, **le vecteur vitesse est tangent à la ligne de courant**.



1. Débit volumique

Le débit volumique D_v représente le volume de fluide qui traverse une section S d'un conduit pendant une durée Δt.

Il s'écrit :

$$\boxed{D_v = \frac{V}{\Delta t}}$$

- D_v : le débit volumique en $m^3.s^{-1}$ (ou en $L.s^{-1}$) ,
- V : le volume de fluide écoulé en m^3 (ou en L)
- Δt la durée, en seconde, pendant laquelle le volume V traverse la section du conduit

2. Régime permanent

Un écoulement est en **régime permanent** lorsque les grandeurs du fluide (vitesse, pression, débit…) ne varient pas au cours du temps.

Pour un fluide incompressible en régime permanent, le débit volumique reste constant : ce qui entre dans le conduit est égal à ce qui en sort.

Exemple : l'eau qui s'écoule d'un robinet ouvert avec un débit constant constitue un écoulement en régime permanent. Le jet garde la même forme et la même vitesse au cours du temps.

Application 3 : Eau dans un conduit horizontal

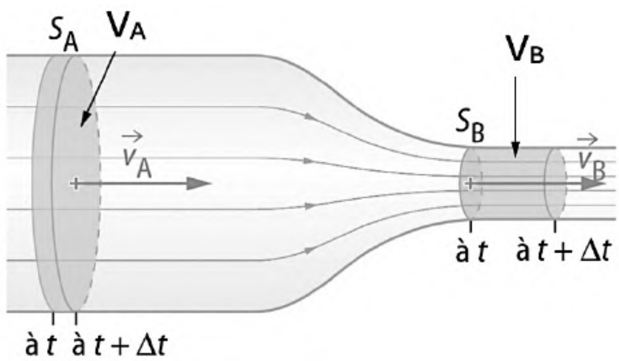
De l'eau, assimilée à un fluide incompressible, s'écoule dans un conduit horizontal en régime permanent et de manière laminaire.

Le conduit possède une section circulaire variable :

- au point A, le diamètre du conduit est d_A = 8,0 cm;
- au point B, le diamètre du conduit est d_B = 4,0 cm.

Le conduit se rétrécit donc entre A et B.

On considère que l'écoulement se fait dans un tube de courant délimité par les parois du conduit.



La vitesse moyenne de l'eau au point A est : $v_A = 1{,}2$ m·s^{-1}

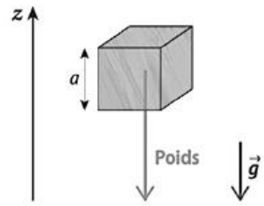
1. Expliquer pourquoi les lignes de courant suivent la direction du conduit.
2. Justifier pourquoi l'écoulement peut être modélisé par un tube de courant.
3. Rappeler l'expression de l'aire d'une section circulaire de diamètre d.
4. Montrer que le débit volumique D_v peut s'écrire : $D_v = S_A\, v_A$ où :
   - S_A est l'aire de la section de la conduite au point A.
   - v_A est la vitesse moyenne du fluide au point A.
5. Quelles hypothèses permettent d'affirmer que le débit volumique est identique aux points A et B ?
6. Montrer que la vitesse moyenne au point B est supérieure à celle au point A : $v_B > v_A$
7. Calculer le débit volumique D_v à la section A.
8. En déduire la vitesse moyenne v_B au point B.

3. Fluide parfait

Un fluide parfait est un fluide incompressible et non visqueux, c'est-à-dire sans frottements internes.
Dans un tel fluide, il n'y a pas de perte d'énergie mécanique lors de l'écoulement. Ce modèle simplifié permet d'établir la relation de Bernoulli.

4. Énergie mécanique volumique d'un fluide parfait

Pour modéliser l'écoulement d'un fluide, on considère une très petite portion de fluide appelée particule fluide.
Dans ce modèle, cette particule est assimilée à un cube de côté a, suffisamment petit pour pouvoir étudier localement les forces et les énergies qui s'exercent sur le fluide.



Application 4 : Énergie mécanique volumique et pression pour une particule de fluide parfait

On considère une particule de fluide assimilée à un cube de côté a.
Le fluide a une masse volumique ρ. La particule se déplace à la vitesse v et se trouve à l'altitude z, dans le champ de pesanteur uniforme g.

On suppose l'écoulement permanent, incompressible, **non visqueux (sans frottement)**, et on suit une même ligne de courant.

1. Donner l'expression de volume puis de la masse de la particule fluide.
2. Donner l'expression de son énergie cinétique E_c , puis de son énergie cinétique volumique $\frac{E_c}{V}$.
3. Donner l'expression de son énergie potentielle de pesanteur E_p , puis de son énergie potentielle de pesanteur volumique $\frac{E_p}{V}$
4. La particule est soumise à une pression P exercée par le fluide qui l'entoure. Montrer que la pression peut s'exprimer en $J.m^{-3}$. On rappelle que : $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$. En déduire que la pression peut être interprétée comme une énergie par unité de volume.

On considère que la particule se déplace d'un point 1 vers un point 2 le long d'une ligne de courant. La pression, la vitesse et l'altitude peuvent varier entre 1 et 2.

5. Écrire l'expression de l'énergie mécanique volumique totale au point 1, puis au point 2. Cette énergie mécanique volumique fait intervenir les trois formes d'énergie volumique étudiées précédemment : pression, énergie cinétique et énergie potentielle de pesanteur.

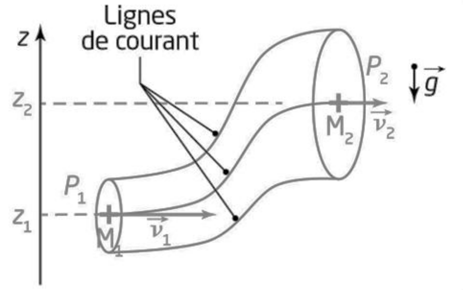
Dans le cas d'un fluide parfait en régime permanent, l'énergie mécanique volumique totale se conserve le long d'une ligne de courant.

6. Écrire alors la relation de conservation entre les points 1 et 2.
7. En déduire la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant.

5. Relation de Bernoulli

La relation de Bernoulli s'applique à l'écoulement d'un fluide incompressible, en régime permanent et sans frottements, entre deux points M_1 et M_2 appartenant à une même ligne de courant :

$$\boxed{P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \;=\; P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$$



Chaque terme s'exprime en énergie volumique, en $J\cdot m^{-3}$.

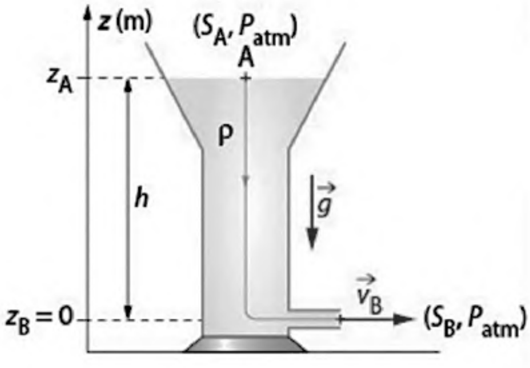
Cette relation traduit la conservation de l'énergie mécanique volumique du fluide au cours de l'écoulement.

Quelques exemples d'utilisation de la relation de Bernoulli :

- l'écoulement du sang dans les vaisseaux sanguins ;
- les mouvements atmosphériques et océaniques ;
- l'écoulement de l'air autour des ailes d'un avion ;
- l'écoulement de l'eau dans les canalisations.

Application 5 : Château d'eau

Un réservoir ouvert à l'air libre (par exemple un château d'eau) contient de l'eau jusqu'à une hauteur h = 12 m au-dessus de l'orifice de sortie.



Le réservoir étant très large, la vitesse de la surface libre de l'eau au point A est considérée comme négligeable : $v_A \approx 0$

On néglige les frottements et on considère que la sortie de l'eau au point B est à la pression atmosphérique.

1. Quelle est la pression à la surface libre de l'eau ?

2. Appliquer la relation de Bernoulli entre la surface libre de l'eau (point A) et l'orifice de sortie (point B).

3. En déduire l'expression de la vitesse v_B de l'eau en sortie.

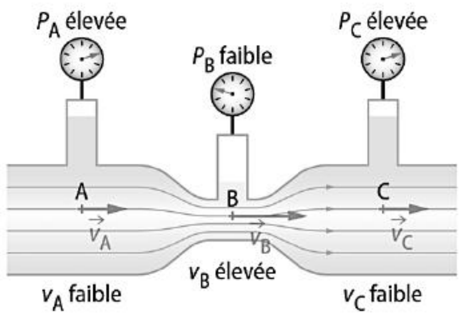
4. Calculer la valeur de v_B en $m \cdot s^{-1}$.

Application 6 : Étranglement d'un tuyau : effet Venturi

De l'eau s'écoule dans un tuyau horizontal qui se rétrécit.

Au point A :

- le rayon du tuyau est $r_A = 4{,}0$ cm ;
- la vitesse de l'eau est $v_A = 2{,}0\ m \cdot s^{-1}$;
- la pression est $P_A = 2{,}5 \times 10^5$ Pa.



Au point B, le rayon du tuyau vaut : $r_B = 2{,}0$ cm

On assimile l'eau à un fluide incompressible et on néglige les frottements.

1. Calculer la vitesse v_B de l'eau au niveau du rétrécissement.
2. Appliquer la relation de Bernoulli entre les points A et B.
3. En déduire la pression P_B au point B.

Effet Venturi : dans un écoulement horizontal, lorsque la vitesse d'un fluide augmente, sa pression diminue. Voir figure ci-dessus

6. Cas particuliers de la relation de Bernouilli

- Pour un fluide **au repos** ($v_1 = v_2 = 0$), la relation de Bernoulli se simplifie et devient la **loi fondamentale de la statique des fluides** étudiée en Première : $P_2 - P_1 = - \rho g (z_2 - z_1)$
- Si $z_2 > z_1$, alors : $P_2 < P_1$. La pression diminue donc lorsque l'altitude augmente. Cette différence de pression est à l'origine de la poussée d'Archimède.

- Pour un écoulement horizontal ($z_1 = z_2$), la relation de Bernoulli se simplifie :

  $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \;=\; P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ soit : $\boxed{P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)}$

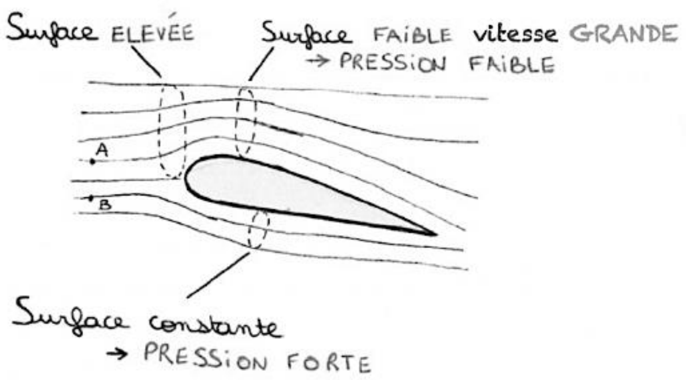
  Dans ce cas, lorsque la vitesse d'écoulement augmente, la pression diminue : c'est l'**effet Venturi**.

Application 7 : Aile d'avion et effet Venturi

Un avion vole horizontalement à vitesse constante. L'air s'écoule autour de son aile.
On suppose que l'air peut être assimilé à un fluide incompressible et que l'écoulement est sans frottements.

La forme de l'aile oblige l'air à s'écouler plus rapidement au-dessus de l'aile qu'en dessous.

On donne : $v_{\text{dessus}} > v_{\text{dessous}}$



1. En utilisant l'effet Venturi, expliquer comment varie la pression lorsque la vitesse de l'air augmente.

2. Comparer la pression de l'air au-dessus de l'aile et en dessous de l'aile.

3. Indiquer dans quel sens s'exerce la force pressante résultante exercée par l'air sur l'aile.

4. Expliquer pourquoi cette force peut permettre à l'avion de voler.

5. Compléter la phrase suivante :
« Lorsque l'air circule plus vite au-dessus de l'aile, la pression y est plus ………………… qu'en dessous. Il apparaît alors une force dirigée vers ………………… appelée force de portance. »

Plan de travail

QCM : http://www.hatier-clic.fr/pct413

Exigences et capacités exigibles du Chapitre 17 : Mécanique des fluides	Applications et TP	Exercices Hatier
Poussée d'Archimède	Applications 1 et 2	23 p.418 33 p.419 36 p.420 42 p.423
Débit volumique	Application 3	35 p.420
Savoir utiliser la relation de Bernoulli et l'effet Venturi.	Applications 4, 5, 6 et 7 Exercices 1 et 2	21 p.417 27 et 29 p.418 34 p.419 35 p.420 38 p.421 40 p.422

Exercice 1 : écoulement de sang dans une artère *Bac 2025 Amérique du nord Jour 2 Secours*

Les artères carotidiennes constituent les principales voies de transport du sang vers le cerveau. Une sténose correspond à un rétrécissement ou à une obstruction partielle d'une artère. Elle peut entraîner de graves problèmes, comme des accidents vasculaires cérébraux (AVC), lorsque le cerveau n'est plus suffisamment alimenté en dioxygène.

Le premier objectif de cet exercice est d'évaluer, par échographie Doppler, la vitesse d'écoulement du sang dans une artère partiellement obstruée. Dans un second temps, il s'agit de modéliser cet écoulement afin d'évaluer l'importance de l'obstruction.

1. Échographie Doppler

Un émetteur-récepteur à ultrasons permet d'étudier les vaisseaux sanguins. Les ondes ultrasonores émises sont partiellement réfléchies par les tissus environnants, mais aussi par les globules rouges présents dans le sang.

Lorsque l'écoulement sanguin est observé, on constate un décalage entre la fréquence émise f_E et la fréquence reçue f_R. La différence : $\Delta f = f_R - f_E$ appelée décalage Doppler, permet de mesurer la vitesse de l'écoulement sanguin et fournit ainsi des informations importantes pour le diagnostic médical.

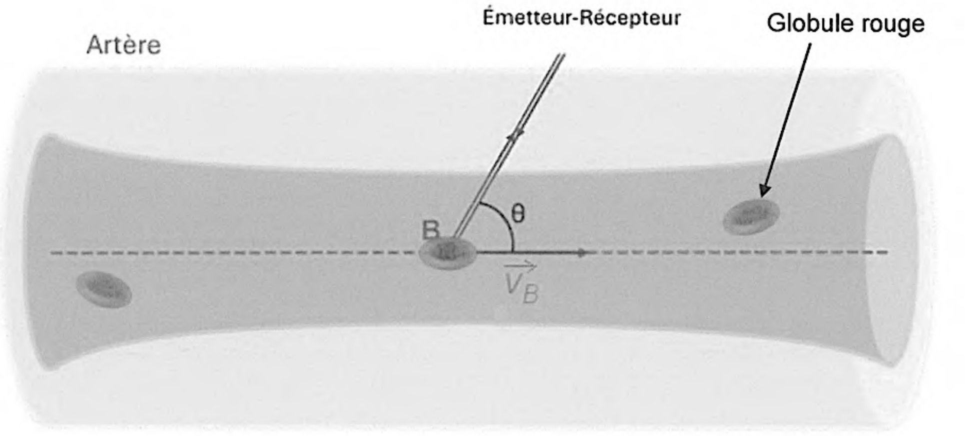


Figure 1 : Mesure de décalage Doppler dasn un écoulement sanguin

1. Expliquer pourquoi on observe un décalage de fréquence lorsqu'un écoulement sanguin est visé.

2. À l'aide de vos connaissances, justifier que le décalage Doppler Δf est positif dans la situation de la figure 1.

Données :

- fréquence de l'onde émise : $f_E = 5{,}0$ MHz
- célérité de l'onde ultrasonore dans les milieux considérés : $c = 1{,}5 \times 10^3$ m·s^{-1}
- expression du décalage Doppler en fonction de la vitesse v de l'écoulement, de la célérité c de l'onde, de la fréquence émise f_E ainsi que de l'angle θ défini sur la figure 1 : $\Delta f = 2 f_E \cos\theta \cdot \frac{v}{c}$

Après une échographie de la zone sténosée d'une artère, le décalage Doppler mesuré vaut : $\Delta f = 7{,}0$ kHz pour un angle : $\theta = 60°$

3. Vérifier que la valeur de la vitesse v_B de l'écoulement au sein de la sténose vaut approximativement : $v_B = 2{,}1$ m·s^{-1}

On représente la situation d'étude dans un cas simple où le fluide traverse d'abord une section S_A, puis, au niveau du rétrécissement, une section S_B.

On modélise la situation dans le cadre d'un écoulement de sang incompressible et en régime permanent.

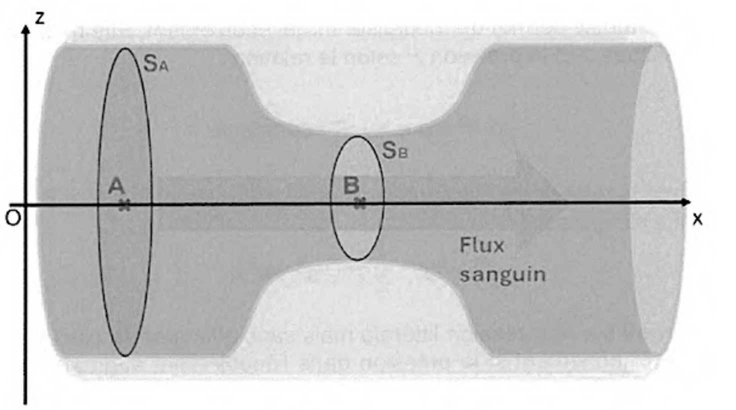


Figure 2. Schéma d'une artère sténosée.

Données :

- le débit volumique D_v est défini en fonction de la vitesse de l'écoulement v et de la section S par : $D_v = v \cdot S$
- section d'une artère carotide avant rétrécissement : $S_A = 1{,}9 \times 10^{-5}$ m^2
- débit volumique dans une artère carotide : $D_v = 1{,}1 \times 10^{-5}$ m$^{3 \cdot}$s^{-1}

4. À l'aide des données, calculer la vitesse v_A de l'écoulement au point A.

Les différents niveaux de rétrécissement peuvent être identifiés en comparant la section de l'artère au niveau de la sténose S_B à la section de l'artère hors de la sténose S_A, comme indiqué dans le tableau 1.

Stade de sténose	Rapport d'ouverture $\frac{S_B}{S_A}$	Mesures médicales préconisées
Légère	$\frac{S_B}{S_A} > 0{,}36$	Contrôles réguliers Alimentation saine et arrêt du tabac Exercice physique
Modérée	$0{,}16 < \frac{S_B}{S_A} < 0{,}36$	Sans symptôme : traitement médical Avec symptômes : traitement chirurgical
Sévère	$\frac{S_B}{S_A} < 0{,}16$	Chirurgie nécessaire Risque élevé d'AVC

Tableau 1. Tableau regroupant les stades de sténose et les mesures indiquées.

Donnée : vitesse de l'écoulement au sein du rétrécissement : $v_B = 2{,}1\ \text{m·s}^{-1}$

5. En considérant que le débit volumique D_v est conservé entre les points A et B, déterminer, à l'aide des données, la valeur du rapport : $\frac{S_B}{S_A}$ pour l'artère au niveau de la sténose. Indiquer ensuite les mesures médicales préconisées.

La relation de Bernoulli permet de modéliser cet écoulement. Elle relie la vitesse v, l'altitude z et la pression P selon la relation : $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P = \text{constante}$

6. Montrer que la relation de Bernoulli appliquée entre les points A et B de la figure 2 peut s'écrire :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2)$$

7. En s'appuyant sur l'expression littérale précédente, mais sans effectuer de calcul, préciser si la pression augmente ou diminue entre les points A et B. Justifier.

Donnée : masse volumique du sang humain : $\rho = 1{,}1 \times 10^3\ \text{kg·m}^{-3}$

8. À l'aide des données, calculer la valeur de la différence de pression : $P_A - P_B$

<u>Exercice 2</u> : Traitement des eaux d'un bassin d'orage *Bac 2025 Amérique du nord Jour 1*

En France, les eaux pluviales produites lors des orages sont parfois stockées dans des bassins de rétention. Cependant, sous l'effet de la chaleur, la quantité de dioxygène dissous dans ces eaux peut diminuer.

Afin d'assurer le rejet de ces eaux dans le milieu naturel, leur taux de dioxygène est surveillé. Cette fonction peut être assurée par des capteurs installés sur une bouée autonome. L'oxygénation de l'eau peut, quant à elle, être réalisée grâce à un aérateur à jet.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la flottabilité d'une telle bouée puis d'évaluer le temps nécessaire à l'amélioration de la qualité de l'eau à l'aide d'un aérateur.

Surveillance de la qualité de l'eau

Une bouée autonome instrumentée est constituée de deux parties principales :

- un capteur ;
- un flotteur contenant les instruments de communication.

L'immersion de la bouée ne doit pas dépasser 20 % de son volume total afin de maintenir les instruments hors de l'eau et de faciliter la communication avec l'extérieur.

Données : volume de la bouée : $V_{bouée} = 6{,}7 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ et masse totale de la bouée : $m = 1{,}0\ \text{kg}$

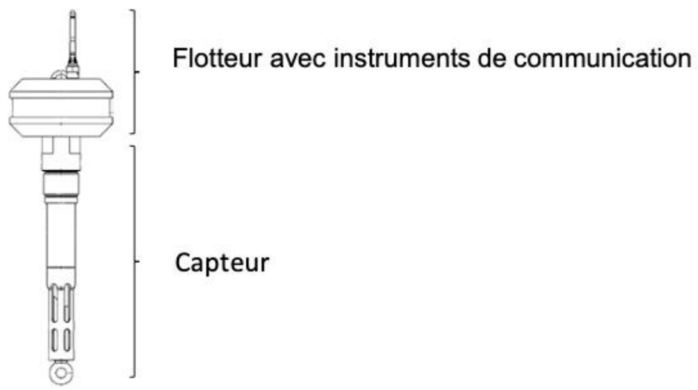


Figure 1. Bouée autonome instrumentée

Expression de la poussée d'Archimède : $\pi_A = \rho_f V_f g$ avec : V_f le volume de fluide déplacé et ρ_f la masse volumique du fluide déplacé.

1. Nommer les deux forces exercées sur la bouée supposée à l'équilibre puis les représenter sur un schéma annoté.

2. Déterminer la valeur du volume immergé V_{imm} de la bouée à l'équilibre.

3. En déduire la proportion du volume immergé par rapport au volume total de la bouée. Commenter.

Traitement de l'eau

La bouée mesure le taux de dioxygène dissous dans l'eau du bassin d'orage.

La norme impose un taux de dioxygène compris entre : $6\ \text{mg·L}^{-1}$ et $8\ \text{mg·L}^{-1}$

Sous l'effet de la chaleur, ce taux diminue et atteint : $4\ \text{mg·L}^{-1}$. Il faut donc augmenter l'oxygénation de l'eau.

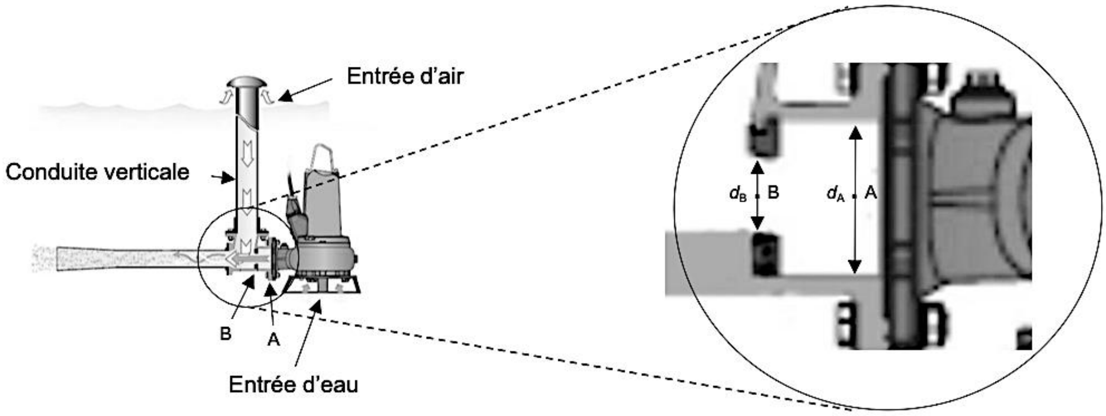


Figure 2. Plan de l'aérateur à jet immergé et zoom sur le rétrécissement (Source : *sulzer.com*)

Pour cela, un aérateur à jet immergé est utilisé afin d'injecter de l'air dans l'eau. L'aérateur aspire l'eau et la fait circuler dans une conduite horizontale présentant un rétrécissement d'une section circulaire de diamètre d_A vers une section de diamètre d_B. C'est au niveau de cette zone rétrécie que l'air et l'eau se mélangent.

Données :

- diamètre de la canalisation au point A : $d_A = 55$ mm	- vitesse de l'eau au point A : $v_A = 5{,}6\ \text{m·s}^{-1}$
- diamètre de la canalisation au point B : $d_B = 33$ mm	- volume d'eau dans le bassin : $V_{eau} = 172\ \text{m}^3$
- Relation Bernouilli : $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{constante}$	- masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg·m}^{-3}$

avec : p : pression ; ρ : masse volumique du fluide ; g : intensité de la pesanteur ; z : altitude et v : vitesse du fluide.

On considère que : l'eau est un fluide incompressible et que l'écoulement est permanent.

Le débit volumique D_V dépend de la vitesse v et de la section S de la canalisation.

4. Recopier la formule correcte du débit volumique parmi les propositions suivantes et justifier le choix par une analyse d'unités : $D_V = \frac{v}{S}$ $\quad D_V = S \cdot v$ $\quad D_V = v^2 \cdot S$

5. Montrer que le débit volumique de l'eau dans la canalisation vaut : $D_V = 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m}^3\text{·s}^{-1}$

6. Exploiter la conservation du débit volumique pour montrer que la vitesse de l'eau au point B vaut environ : $v_B = 16\ \text{m·s}^{-1}$

7. Nommer le phénomène physique observé au point B responsable de l'aspiration de l'air.

8. Montrer que la variation de pression entre les points A et B peut s'écrire : $\Delta p = p_B - p_A = \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$

9. Calculer la valeur numérique de Δp. Commenter le résultat.

L'eau du bassin, dont le taux de dioxygène est de : $4\ \text{mg·L}^{-1}$ doit être rejetée en moins de deux heures dans une rivière voisine. Elle doit donc être traitée avant son évacuation.

L'aérateur est mis en marche. On considère que l'oxygénation est constante pendant tout le processus et que le bassin constitue un système fermé.

10. Montrer qu'il faut ajouter 344 g de dioxygène afin d'atteindre un taux de : $6\ \text{mg·L}^{-1}$

L'aérateur permet l'assimilation de 6 mg de dioxygène par litre d'eau brassé.

11. Calculer le volume d'eau devant être brassé afin d'assimiler la masse de dioxygène nécessaire.

12. Déterminer si l'oxygénation peut être réalisée en moins de deux heures.