

19. Dynamique d'un système électrique

Activités

p. 538 à 541

① Comportement capacitif

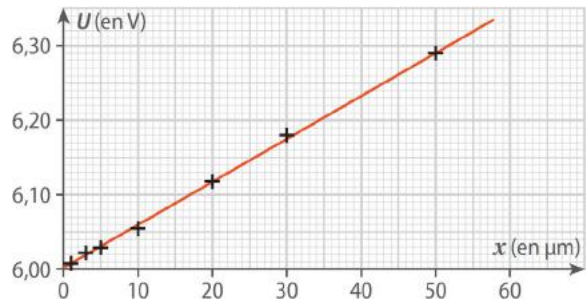
- On ferme l'interrupteur. D_1 et D_3 s'éclairent. Puis D_1 s'éteint au bout de quelques secondes.
 - On ouvre l'interrupteur. D_2 s'allume, D_3 reste allumée. Puis au bout de quelques secondes, D_2 et D_3 s'éteignent.
 - Pendant la première phase, le condensateur accumule des charges à ses armatures, alors que le courant parcourt sa branche (D_1 est allumée). Lorsque celles-ci sont saturées, le courant ne peut plus circuler dans la branche contenant le condensateur et la diode D_1 s'éteint. Lors de la deuxième phase, le condensateur se décharge : les charges qu'il avait accumulées quittent ses armatures. Les charges positives qui étaient du côté de D_1 passent alors à travers D_2 , qui seule permet au courant de passer dans ce sens. Une fois la décharge terminée, aucun courant ne circule et D_2 s'éteint.
- Si on éloigne les armatures, la force d'attraction entre les charges qui s'accumulent sur les plaques est moins grande (loi de Coulomb) et il n'est donc pas possible d'en accumuler autant qu'avec des plaques proches où l'attraction est forte. - L'air est un excellent isolant. Si l'on introduit un autre isolant, moins efficace, les charges pourront s'accumuler plus facilement sur les plaques pour une tension et une distance d'écartement données. La capacité du condensateur augmente.
 - Les mesures sont cohérentes avec les prévisions.
 - La valeur de la capacité augmente quand l'aire augmente.

Bilan

- Les DEL ont permis d'observer le sens du courant. Le comportement capacitif est mis en évidence par le blocage du courant lorsqu'il ne peut plus accumuler de charges, puis par le fait qu'il peut restituer les charges dans une autre partie du circuit.
- La relation $C = \frac{\epsilon S}{\ell}$ est cohérente avec les observations : C augmente quand l'aire augmente, C diminue quand l'écartement entre les armatures augmente, et enfin C varie avec la nature de l'isolant (qui est représentée par la valeur de ϵ). On déduit de l'expression proposée $\epsilon = \frac{C\ell}{S}$ et par analyse dimensionnelle l'unité de cette grandeur : $F \cdot m^{-1}$.

② Capteur de déplacement

- Représentation graphique ci-dessous.



- On déduit du tracé les valeurs $U_g = 12$ V et $d = 1,0$ mm. La valeur d représente l'écart entre les armatures lorsque celle qui est mobile est au centre des armatures fixes ($x = 0$).

- On exprime $s = \frac{dU}{dx} = \frac{U_g}{2d}$.

La valeur de s dépend pas de x , elle est donc la même pour toute position. On calcule $s = 6,0$ V·mm⁻¹.

- D'après l'expression trouvée à la question précédente, lorsque d diminue, la valeur de s augmente. Cependant, pour de faibles valeurs de d , l'armature mobile ne pourra plus beaucoup bouger entre les fixes et il y a un risque de court-circuit si elles entrent en contact.

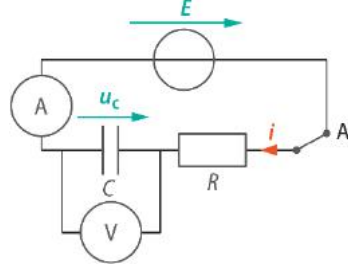
- On note $\Delta U = 1$ mV la plus petite variation de tension détectable et Δx la variation de position associée. La sensibilité ne dépendant pas de la valeur de x , on peut écrire $\Delta x = \frac{\Delta U}{s} = 0,2$ mm.

Bilan

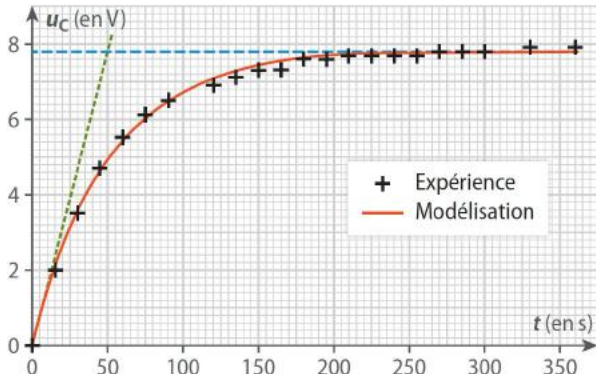
- La sensibilité du capteur indique que les déplacements millimétriques peuvent être détectés sans problème.
- Une sensibilité élevée permet de détecter de petits déplacements car la tension produite sera mesurable. Cependant, si le capteur est très sensible, il peut détecter des petits mouvements qui ne sont pas pertinents (vibrations d'origine externes, par exemple) vis-à-vis de la mesure.

③ Charge et décharge d'un condensateur

1. a. Schéma ci-contre.
b. On donne ci-dessous la représentation graphique de la tension au cours du temps. On trace la courbe modèle $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, où E et τ sont des paramètres à déterminer.



L'accord entre la courbe et les points expérimentaux est excellent, ce qui valide le choix du modèle.

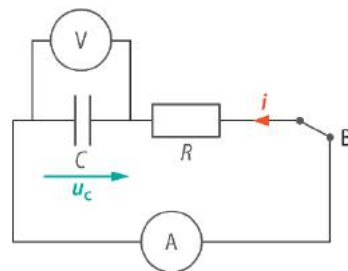


La courbe de l'intensité, quant à elle, serait modélisée sous la forme $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$. Les valeurs obtenues doivent être cohérentes avec le premier modèle.

c. Le modèle donne $E = 7,78 \text{ V}$ et $\tau = 50,3 \text{ s}$. Le tracé de l'asymptote à l'origine et de l'asymptote sur le graphique permet aussi de déterminer la valeur du temps caractéristique du circuit $\tau = 50 \text{ s}$, qui est cohérente avec la première valeur trouvée. On en déduit la capacité du condensateur :

$$C = \frac{\tau}{R} = 1,00 \times 10^{-3} \text{ F}$$

2. a. Pour la décharge, le schéma du circuit est donné ci-contre.
b. La courbe de tension est modélisée par l'équation $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$, où U_0 et τ sont des paramètres à déterminer.



La courbe de l'intensité est modélisée par une équation de la forme $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$, où $i_0 < 0$ et τ doit avoir une valeur cohérente avec celle de l'autre modèle.

c. La méthode de détermination graphique reste la même : abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote aux temps longs. Les valeurs doivent être cohérentes avec celles issues des modèles.

On retrouve $C = \frac{\tau}{R}$ et sa valeur doit être cohérente avec celle issue des manipulations sur la charge.

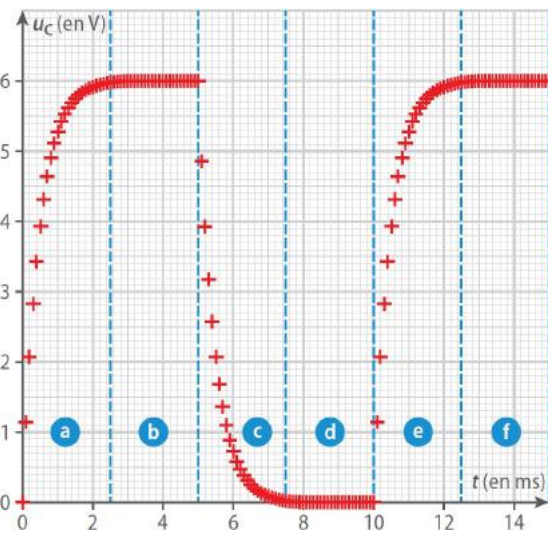
3. La valeur de $1,00 \times 10^{-3} \text{ F}$ est compatible avec la valeur annoncée de $1\,000 \mu\text{F} \pm 20\%$.

Bilan

- La charge et la décharge permettent de mettre en évidence la dynamique du système. À l'aide du temps caractéristique, déterminé par une modélisation ou une méthode graphique, on parvient à déterminer la valeur de la capacité via la relation $\tau = RC$.
- Diverses sources d'erreurs dans la détermination de C :
 - le déclenchement du chronomètre doit être synchronisé avec le départ de la charge ou la décharge ;
 - le temps de lecture de la tension et l'intensité à une date donnée ;
 - la précision des multimètres ;
 - l'accord entre le modèle et les points expérimentaux.

④ Étude de cycles de charge et décharge du condensateur

1. a. Dans le graphique ci-dessous, extrait de l'acquisition obtenue, les lignes verticales en pointillés séparent les zones successives de « charge du condensateur » (a et e), « charge terminée » (b et f), « décharge du condensateur » (c), « décharge terminée » (d).



b. Par méthode graphique, on peut déterminer l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote aux temps longs. On peut aussi repérer graphiquement le temps pour que 63 % de la charge ou de la décharge soit terminée. La valeur doit être cohérente avec $\tau = RC = 4,7 \times 10^{-4} \text{ s}$.

c. La période vaut $T = \frac{1}{f} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ s}$. On a $\tau \ll T$.

2. a. Dans le cas où la fréquence vaut 100 Hz, les phases de charge et de décharge sont complètes. Ce n'est plus le cas pour les fréquences supérieures.
b. Si l'on considère que la charge et la décharge sont complètes en une durée 5τ , alors il faut avoir $5\tau < \frac{T}{2}$, soit $10\tau < T$. En effet, la charge (ou la décharge) ne se déroule que sur la moitié du signal du générateur.

3. Lorsque la fréquence vaut 1,0 MHz, la tension du générateur semble constamment nulle. L'échelon de tension se déroule trop rapidement pour que la charge se produise de façon sensible, puis le condensateur est déchargé. Sa tension étant constamment nulle, la tension aux bornes de la résistance est identique à celle du générateur. Aussi, durant la première moitié de la période du signal du générateur, le courant vaut $\frac{E}{R}$ (par la loi d'Ohm) et il est nul pendant la seconde moitié.

4. Lorsque la fréquence vaut 20 Hz, la charge et la décharge se déroulent très rapidement par rapport aux variations du signal du générateur. Lors de la première moitié de la période du signal du générateur, la tension du condensateur semble donc être celle du générateur (elle vaut E). Pendant la seconde moitié, elle semble nulle.

L'intensité du courant électrique semble constamment nulle puisqu'en apparence, durant chaque moitié de la période du signal, la tension aux bornes du condensateur est constante.

Bilan

- À très basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : la tension est établie instantanément et il n'est traversé par aucun courant.
- À très haute fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé. Aucune tension à ses bornes, mais il peut être traversé d'un courant non nul.
- La valeur du temps caractéristique détermine le comportement du condensateur en régime alternatif. Si le temps caractéristique est très différent de la période de la tension qui lui est imposée, il prend le comportement d'un interrupteur ouvert ou bien fermé. Une application de ce comportement est celui du filtre passe-bas : les tensions à basse fréquence sont correctement « reproduites » par le condensateur, alors que les comportements à haute fréquence sont éliminés car la charge et la décharge n'ont pas le temps de se produire.

Exercices

Exercices 1 à 20 corrigés à la fin du manuel de l'élève.

Exercices 21 à 23 corrigés dans le manuel de l'élève.

24 a. On utilise la loi des mailles et la loi d'Ohm :

$$E - u_C - Ri = 0$$

Puis on utilise la relation du condensateur pour

$$\text{remplacer } i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et on trouve ainsi } RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

b. On calcule la dérivée de la solution proposée :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{(U_0 - E)}{RC} e^{-t/RC}$$

Puis on remplace u_C et sa dérivée dans l'équation différentielle :

$$RC \times \left(-\frac{U_0 - E}{RC} e^{-t/RC} \right) + E + (U_0 - E)e^{-t/RC} = -(U_0 - E)e^{-t/RC} + E + (U_0 - E)e^{-t/RC} = E$$

L'équation est vérifiée, la solution convient. En outre :

$$u_C(t=0) = E + (U_0 - E)e^0 = E + U_0 - E = U_0$$

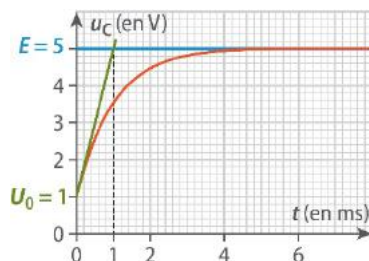
ce qui correspond à la condition initiale.

c. On lit la valeur initiale de la tension : $U_0 = 1,0$ V.

On estime la valeur de l'asymptote horizontale :

$$E = 5,0 \text{ V.}$$

d. On trace la tangente à l'origine et on lit l'abscisse de son intersection avec l'asymptote horizontale :



$$\tau = 1,0 \text{ ms.}$$

On déduit la valeur

$$\text{de la capacité : } C = \frac{\tau}{R} = 1,0 \times 10^{-7} \text{ F}$$

e. Le condensateur avait initialement une charge $q_0 = CU_0 = 1,0 \times 10^{-7}$ C. À la fin de la charge, il a une charge $q = CE = 5,0 \times 10^{-7}$ C. La charge accumulée vaut donc $4,0 \times 10^{-7}$ C.

Exercice 25 corrigé à la fin du manuel de l'élève.

26 L'intensité du courant électrique est la dérivée de la charge électrique. Pour une droite, cela correspond à son coefficient directeur.

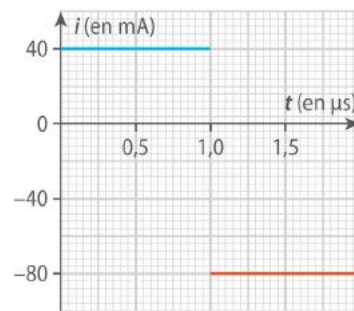
La première partie de la courbe est une droite de

$$\text{pente } i_1 = \frac{40 \times 10^{-9}}{1,0 \times 10^{-6}} = 4,0 \times 10^{-2} \text{ A.}$$

La seconde partie de la courbe est une droite de

$$\text{pente } i_2 = \frac{-40 \times 10^{-9} - 40 \times 10^{-9}}{2,0 \times 10^{-6} - 1,0 \times 10^{-6}} = -8,0 \times 10^{-2} \text{ A.}$$

On en déduit le graphique de $i(t)$ (ci-dessous).



Exercice 27 corrigé à la fin du manuel de l'élève.

28

U_{AB}	C	q_A	q_B
5,0 V	16,0 pF	$8,0 \times 10^{-11}$ C	$-8,0 \times 10^{-11}$ C
9,0 mV	7,0 μF	$-6,3 \times 10^{-8}$ C	$6,3 \times 10^{-8}$ C
-4,0 μV	$7,0 \times 10^{-2}$ F	$-2,8 \times 10^{-7}$ C	$2,8 \times 10^{-7}$ C

Exercice 29 corrigé à la fin du manuel de l'élève.

30

C	R	τ
9,0 mF	200 k Ω	$1,8 \times 10^3$ s
$5,0 \times 10^{-5}$ F	2,4 M Ω	120 s
0,70 μ F	$1,0 \times 10^4$ Ω	700 ms

Exercice 31 corrigé à la fin du manuel de l'élève.

32 a. On calcule $\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{RC}e^{-t/RC}$ et on remplace dans l'équation différentielle :

$$RC \times \left(-\frac{U_0}{RC}e^{-t/RC}\right) + U_0e^{-t/RC} = -U_0e^{-t/RC} + U_0e^{-t/RC} = 0$$

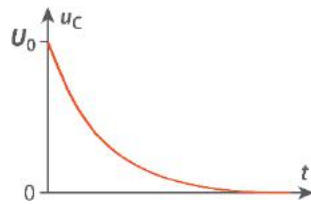
Cette solution ne dépend pas de la valeur U_0 .

b. D'après la relation du condensateur :

$$q_0 = CU_0$$

$$c. U_0 = \frac{q_0}{C} = 70 \text{ V}$$

On donne ci-contre l'allure de la courbe de décharge.



Exercice 33 corrigé à la fin du manuel de l'élève.

34 a. La courbe bleue montre une décharge plus rapide, donc un temps caractéristique plus court : $\tau_1 < \tau_2$. La capacité étant inchangée entre les deux situations, on en déduit $R_1 < R_2$.

b. Par la méthode de la tangente (ou bien en cherchant $u_C(\tau) = 3,7$ V), on trouve que $\tau = 1,3$ s.

$$\text{On en déduit } C = \frac{\tau_1}{R_1} = \frac{1,3}{20 \times 10^3} = 6,5 \times 10^{-5} \text{ F.}$$

c. Par le tracé de tangente à l'origine ou bien par le repérage de la valeur $u_C(\tau)$, on constate que $\tau_2 \approx 2\tau_1$ donc on en déduit que $R_2 = 38$ k Ω car c'est la proposition la plus cohérente.

35 a. On calcule $\frac{du_C}{dt} = -\frac{B}{RC}e^{-t/RC}$ et on remplace les expressions de u_C et $\frac{du_C}{dt}$ pour vérifier l'équation différentielle :

$$RC \times \left(-\frac{B}{RC}\right)e^{-t/RC} + A + Be^{-t/RC} = -Be^{-t/RC} + A + Be^{-t/RC} = A$$

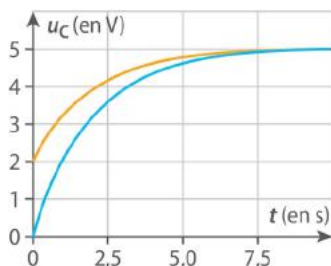
On en déduit que $u_C(t)$ est une solution si et seulement si $A = E$.

b. Si le condensateur est initialement déchargé, $u_C(t=0) = 0$ et si on remplace avec son expression : $u_C(t=0) = E + Be^0 = 0$ d'où $B = -E$.

c. Dans ce cas :

$$u_C(t=0) = E + Be^0 = U_0 \text{ d'où } B = U_0 - E.$$

d. Un exemple où $E = 5,0$ V et $U_0 = 2$ V :



36 1. On a $q > 0$ et d'après le schéma et les conventions d'orientation, la charge positive est portée par l'armature B.

2. On établit l'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur en utilisant la loi des mailles, la loi d'Ohm, puis la relation courant-tension du condensateur :

$$u_C + u_R - E = 0 \quad u_C + Ri = E$$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E$$

On utilise alors la relation liant la charge à la tension du condensateur $q = Cu_C$ que l'on remplace dans l'équation et on déduit la relation demandée :

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = E \text{ soit } \frac{q}{RC} + \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}$$

3. a. On calcule $\frac{dq}{dt}$ à partir de l'expression proposée :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{b}{RC}e^{-t/RC}$$

et on remplace les expressions de q et $\frac{dq}{dt}$ dans

l'équation différentielle :

$$-\frac{b}{RC}e^{-t/RC} + \frac{a}{RC} + \frac{b}{RC}e^{-t/RC} = \frac{a}{RC}$$

Pour que la solution convienne, on doit avoir $\frac{a}{RC} = \frac{E}{R}$

soit $a = CE$.

b. Graphiquement, on détermine $q(t=0) = 0$.

En remplaçant l'expression de $q(t)$, on a :

$$CE + be^0 = 0 \text{ d'où } b = -CE.$$

4. a. Le courant s'exprime :

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{-CE}{RC}e^{-t/RC} = \frac{E}{R}e^{-t/RC}$$

b. Valeur initiale : $i_0 = i(t=0) = \frac{E}{R}$

c. i_0 correspond au coefficient directeur de la tangente

à l'origine. On estime $i_0 = \frac{0,4 \times 10^{-6}}{1,0 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{-4}$ A.

$$\text{On en déduit } R = \frac{E}{i_0} = \frac{6}{4 \times 10^{-4}} = 1,5 \times 10^4 \Omega.$$

37 1. Le temps caractéristique associé à la charge du circuit est $\tau_1 = RC_1 = 9,0 \times 10^{-4}$ s. Sur le graphique, la courbe rouge est telle que 67 % de la charge est atteinte à $t = \tau_1$; on l'associe donc à C_1 .

2. a. La capacité d'un condensateur est proportionnelle à l'aire de la surface des armatures. Si l'aire est quadruplée, le temps caractéristique également. La charge prend donc plus de temps, ce qui correspond à la courbe bleue.

Le temps caractéristique mesuré pour la courbe bleue est $\tau_1 = 3,6$ ms environ, d'où $C_2 = \frac{\tau_2}{R} = 20 \mu\text{F}$.

b. Il faut augmenter la distance entre les armatures pour diminuer la capacité.

3. a. La distance entre les armatures ayant augmenté, la capacité a diminué et la charge est donc plus rapide. Cela correspond à la courbe verte.

$$C_3 = \frac{C_1}{5} = 1,0 \mu\text{F}$$

b. Il faudrait augmenter l'aire de la surface des armatures pour retrouver la capacité C_1 .

38 a. On note en lettres capitales les dimensions des grandeurs. $i = C \frac{du_C}{dt}$ donc $I = \frac{[C]U}{T}$ et la dimension de la capacité est $[C] = \frac{IT}{U}$.

b. D'après la loi d'Ohm, $u = Ri$ donc $[R] = \frac{U}{I}$.

c. La dimension de τ se déduit des questions précédentes : $[\tau] = [R] \times [C] = \frac{U}{I} \times \frac{IT}{U} = T$

Le temps caractéristique est homogène à une durée.

39 a. Un dipôle a un comportement capacitif quand des charges électriques de signes opposés s'accumulent à ses bornes sous l'effet d'une tension appliquées entre elles.

b. La capacité d'un condensateur dépend de l'aire de la surface des armatures et de la distance entre elles. Un capteur capacitif de déplacement permet d'associer une variation de capacité à une variation de distance entre les armatures.

40 a. Voir schéma ci-contre.

b. La tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à la charge portée par les armatures. La charge ne peut changer instantanément et en conséquence u_C non plus. Cette grandeur est donc continue à tout instant et en particulier, à l'instant initial.

c. Avant la fermeture, aucun courant ne circule dans le circuit qui est ouvert : $i = 0$

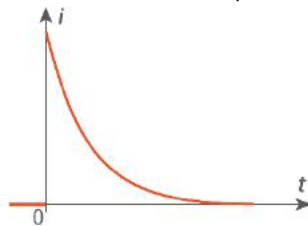
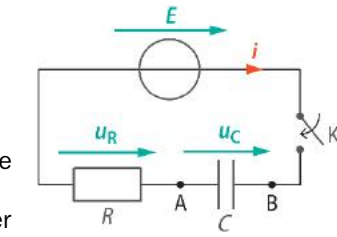
d. Après la fermeture de l'interrupteur, on détermine l'expression du courant électrique :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \times E \times \frac{1}{RC} e^{-t/RC} = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$$

e. À l'instant initial, $i_0 = i(t=0) = \frac{E}{R} e^0 = \frac{E}{R}$.

Cette valeur est différente de celle avant la fermeture de l'interrupteur. L'intensité du courant électrique n'est pas continue.

f. Graphique ci-contre de l'allure de l'intensité du courant électrique avant et après la fermeture de l'interrupteur.



41 a. $i = -C \frac{du_C}{dt}$ en convention générateur.

L'intensité est constante, on intègre la relation entre l'instant initial où la tension vaut $u_C = U_0$ et un instant t quelconque :

$$u(t) - U_0 = -\frac{I}{C}(t - 0) \Rightarrow u(t) = U_0 - \frac{I}{C}t$$

b. La décharge se produit complètement ($u = 0$) en une durée $\Delta t = 0,5$ s. On a donc $C = \frac{U_0 \Delta t}{I} = 4,0 \times 10^3$ F.

Cette valeur est très élevée par rapport à des condensateurs usuels dont la capacité est au maximum de l'ordre du millifarad.

c. La charge stockée est $q = CU_0 = 1,6 \times 10^9$ C.

d. Si les nuages sont à basse altitude, la capacité est plus élevée car les « armatures » sont plus proches. Si les nuages sont étendus, l'aire de la surface des armatures augmente et la capacité du nuage également.

42 1. a. On fait un schéma de la situation. D'après la loi des mailles, on a :

$$u_C + u_R = 0$$

D'après la loi d'Ohm, on a :

$$u_R = Ri$$

Et par la relation courant-tension du condensateur,

$$\text{on a : } i = C \frac{du_C}{dt}$$

On en déduit ainsi : $u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0$

ou encore : $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0$

b. La solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est de la forme $u_C(t) = Ae^{-t/RC}$, où A est une constante à déterminer. D'après les conditions initiales :

$u_C(t=0) = U_0$ donc $Ae^0 = U_0$
d'où $A = U_0$ et finalement, $u_C(t) = U_0 e^{-t/RC}$.

c. On utilise la relation du condensateur :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \times \left(-\frac{1}{RC}\right) U_0 e^{-t/RC} = -\frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

2. a. En valeur absolue, le courant est le plus élevé en début de décharge, donc $|i_{\max}| = |i(t=0)| = \frac{U_0}{R}$.

b. La valeur de $|i_{\max}|$ ne dépend que de la tension initiale et de la valeur de la résistance.

Exercice 43 corrigé à la fin du manuel de l'élève.

44 1. Le verre étant un isolant, la bouteille accumule des charges électriques de signes opposés à l'intérieur de la bouteille et sur la face externe de la bouteille. Cette accumulation de charge de part et d'autre d'un isolant est un comportement capacitif.

2. a. Il s'agit d'une électrisation par contact.

b. Le morceau de liège ayant pris une partie de la charge de la tige, il porte une charge de même signe. La tige et la boule se repoussent alors par interaction électrostatique.

c. La tige associée à l'armature externe porte une charge opposée à l'autre tige, et donc opposée à la boule. La tige extérieure et la boule sont en interaction électrostatique attractive.

d. Lorsque le morceau de liège arrive au contact de la tige reliée à l'armature externe, il se décharge à son contact, puis acquiert une partie de sa charge électrique.

e. Chaque fois que le liège atteint une tige chargée, il lui cède une charge opposée (acquise sur l'autre tige) et prend une partie de sa charge. Ce faisant, la charge sur chaque tige diminue à chaque passage du liège. Lorsque cette charge sera insuffisante pour pousser le liège d'une tige à l'autre, le mouvement cessera.

45 a. On note i le courant parcourant le circuit, issu de la borne positive du générateur. On établit l'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur en utilisant la loi des mailles, la loi d'Ohm, puis la relation courant-tension du condensateur :

$$u_C + u_R - E = 0 \quad u_C + Ri = E$$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E \quad \text{soit} \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

b. On calcule $\frac{du_C}{dt} = -\frac{B}{RC} e^{-t/RC}$ et on remplace dans l'équation différentielle :

$$-\frac{B}{RC} e^{-t/RC} + \frac{A}{RC} + \frac{B}{RC} e^{-t/RC} = \frac{E}{RC} \quad \text{soit} \quad A = E$$

En outre, d'après les conditions initiales (graphiques), on a $u_C(t=0) = 0$ donc $E + Be^0 = 0$ soit $B = -E$.

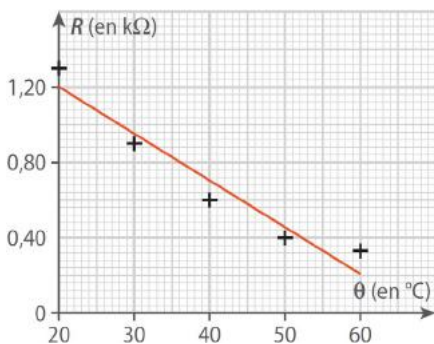
c. On repère graphiquement l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote aux temps longs. On trouve $\tau_1 = 1,3$ ms.

d. La résistance vaut $R_1 = \frac{\tau_1}{C} = 1,3 \times 10^3 \Omega$.

θ (en °C)	20	30	40	50	60
τ (en ms)	1,3	0,90	0,60	0,40	0,33
R (en k Ω)	1,3	0,90	0,60	0,40	0,33

f. On trace les points et la droite d'étalonnage d'équation : $R = a\theta + b$

où $a = -0,025 \text{ k}\Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ et $b = 1,7 \text{ k}\Omega$.



g. À partir de l'étalonnage, on détermine :

$$\theta_p = \frac{R_p - b}{a} = 48 \text{ }^\circ\text{C}$$

On peut aussi pointer sur la droite d'étalonnage la valeur θ_p correspondant à R_p .

46 1. a. On applique la loi des mailles et la loi d'Ohm pour le dipôle ohmique : $E - Ri - u_C = 0$

b. D'après la loi d'Ohm : $u_C = Ri_1$

c. Par la relation courant-tension du condensateur,

$$\text{on a : } i_2 = C \frac{du_C}{dt}$$

d. Par la loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

2. On remplace i et les expressions de i_1 et i_2 dans la première relation (1a) : $E - R\left(\frac{u_C}{R_f} + C \frac{du_C}{dt}\right) - u_C = 0$

$$\text{On développe : } E - \frac{R}{R_f} u_C - RC \frac{du_C}{dt} - u_C = 0$$

On met sous la forme attendue par l'énoncé :

$$\frac{du_C}{dt} = -\left(1 + \frac{R}{R_f}\right) \times \frac{1}{RC} u_C + \frac{E}{RC}$$

$$\text{On identifie alors } \tau = \frac{RC}{1 + \frac{R}{R_f}} = \frac{CRR_f}{R + R_f}$$

3. a. La solution particulière s'écrit $u_{Cp} = \frac{E\tau}{RC} = \frac{ER_f}{R + R_f}$.

b. La solution particulière correspond à la valeur de l'asymptote aux temps longs, puisque c'est une valeur constante qui ne dépend pas du temps. Vu l'expression de u_{Cp} , sa valeur augmente si celle de R_f augmente.

c. Si $R_f \gg R$, alors $R + R_f \approx R_f$ et l'expression du temps caractéristique devient $\tau = \frac{CRR_f}{R + R_f} \approx \frac{CRR_f}{R_f} = RC$.

De la même manière, la valeur asymptotique devient $u_{Cp} \approx \frac{ER_f}{R_f} = E$. Pour une résistance de fuite élevée, on trouve les expressions habituelles du dipôle RC.

4. a. À l'instant initial, on lit une tension nulle. Par la relation $q = Cu_C$ du condensateur (q désignant la charge portée par l'armature positive), le condensateur est déchargé car $q = 0$.

b. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $u_{Cg}(t) = Ae^{-t/\tau}$ donc la solution s'écrit :

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + u_{Cp}$$

On détermine la valeur de A grâce à la condition initiale : $u_C(t=0) = 0$ donc $Ae^0 + u_{Cp} = 0$

d'où $A = -u_{Cp}$ et on a bien $u_C(t) = u_{Cp}(1 - e^{-t/\tau})$.

c. Première méthode : on lit sur le graphique que $u_{Cp} = 9,0 \text{ V}$. On déduit la valeur de R_f en résolvant :

$$u_{Cp} = \frac{ER_f}{R + R_f} \quad \text{soit} \quad R_f = \frac{u_{Cp}R}{E - u_{Cp}} = 9,0 \text{ k}\Omega$$

Deuxième méthode : on lit graphiquement l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote aux temps longs : $\tau = 0,9 \text{ ms}$ et on déduit la valeur de R_f en résolvant :

$$\tau = \frac{CRR_f}{R + R_f} \quad \text{soit} \quad R_f = \frac{\tau R}{RC - \tau} = 9,0 \text{ k}\Omega$$

47 1. La puissance P disponible vaut :

$$P = 80 \times 735,5 = 5,9 \times 10^4 \text{ W}$$

Si elle est utilisée pendant une durée $\Delta t = 6,7 \text{ s}$, l'énergie correspondante vaut $E = P\Delta t = 3,9 \times 10^5 \text{ J}$.

2. a. La tension sous laquelle le condensateur est chargé est $u = 2,7 \text{ V}$ donc la capacité vaut :

$$C = \frac{2E}{u^2} = 6,0 \times 10^4 \text{ F}$$

b. Les supercondensateurs ont une capacité pouvant aller jusqu'à 10 000 F, or la valeur trouvée en 2a est bien supérieure. Il faut donc associer plusieurs condensateurs afin d'obtenir une capacité plus élevée.

3. La décharge se produit en 6,7 s. Si elle est totale, on peut estimer le temps caractéristique de

décharge $\tau = \frac{\Delta t}{5}$ et à partir de la relation $\tau = RC$, on

estime pour la résistance du dipôle ohmique :

$$R = \frac{\Delta t}{5C} = 2,2 \times 10^{-5} \text{ s}$$

4. La densité d'énergie des supercondensateurs est d'environ $20 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, or le pilote souhaite disposer de $3,9 \times 10^5 \text{ J}$. Cette énergie correspond à une masse

$$m = \frac{3,9 \times 10^5}{20 \times 10^3} = 10 \text{ kg. Cette masse alourdit}$$

sensiblement le véhicule, ce qui est gênant en Formule 1.

- 48** 1. Le temps caractéristique est $\tau = 117$ ps, d'après la tangente tracée. Comme la résistance du dipôle ohmique vaut $R_1 = 330 \Omega$, la capacité du condensateur est donc $C = \frac{\tau}{R_1} = 3,55 \times 10^{-13}$ F.
2. Le temps caractéristique est identique.
3. a. L'intensité du courant est nulle, la charge portée est constante.
b. Si on rapproche les plaques, C augmente. Comme q est constante, u diminue.
c. Ainsi, visualiser les variations de u permet de connaître les variations de C , donc de la distance entre les plaques. On a ainsi réalisé un capteur de déplacement.

- 49** 1. a. D'après le principe de conservation de la charge : $q_1(t) + q_2(t) = q_1(0) + q_2(0) = q_0$
b. Par la loi des mailles et la loi d'Ohm :
 $Ri + u_2 - u_1 = 0$
- c. La relation du condensateur donne : $i = \frac{dq_2}{dt}$
- d. On remplace i dans l'expression en **1b** et on a :

$$R \frac{dq_2}{dt} + u_2 - u_1 = 0$$

Puis on utilise les relations constitutives $q_1 = C_1 u_1$ et $q_2 = C_2 u_2$ pour remplacer u_1 et u_2 :

$$R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1} = 0$$

Puis on remplace q_1 grâce à la question **1a** :

$$R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} - \frac{1}{C_1} (q_0 - q_2) = 0$$

On obtient, après un peu de calcul : $\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{\tau_A} = \frac{q_0}{\tau_B}$

avec $\tau_A = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$ et $\tau_B = RC_1$.

2. a. La solution sans second membre est de la forme $q_{2\text{ssm}}(t) = Ae^{-t/\tau_A}$.

b. Une solution particulière est $q_{2p} = \frac{q_0 \tau_A}{\tau_B}$.

c. La solution totale est $q_2(t) = q_{2\text{ssm}}(t) + q_{2p}(t)$, soit $q_2(t) = Ae^{-t/\tau_A} + \frac{q_0 \tau_A}{\tau_B}$. D'après la condition initiale,

$q_2(t=0) = 0$ donc $Ae^0 + \frac{q_0 \tau_A}{\tau_B} = 0$ d'où $A = -\frac{q_0 \tau_A}{\tau_B}$

et on a $q_2(t) = \frac{q_0 \tau_A}{\tau_B} (1 - e^{-t/\tau_A})$.

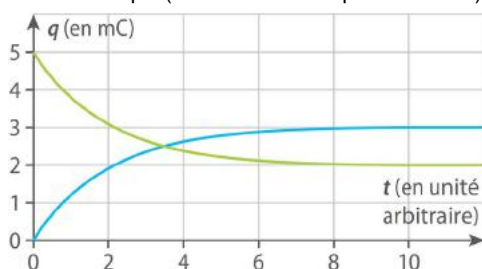
Pour des temps très longs :

$$q_{2\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = \frac{q_0 \tau_A}{\tau_B} = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} = 3,0 \text{ mC}$$

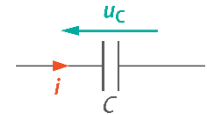
et par la conservation de la charge :

$$q_{1\infty} = q_0 - q_{2\infty} = \frac{q_0 C_1}{C_1 + C_2} = 2,0 \text{ mC}$$

d. On trace l'allure des charges des condensateurs au cours du temps (unité arbitraire pour celui-ci).



- 50** 1. a. Schéma ci-contre.
b. La puissance reçue s'exprime ainsi : $p(t) = u_c(t) i(t)$



En remplaçant $i = C \frac{du_c}{dt}$, on

obtient : $p(t) = C u_c \frac{du_c}{dt}$

c. La puissance reçue est une variation d'énergie reçue pendant une courte durée.

En conséquence, on peut écrire : $p(t) = \frac{dE_C}{dt}(t)$

d. Si l'énergie initialement emmagasinée est nulle, on peut intégrer la puissance reçue pour obtenir l'énergie reçue. Dans l'expression de la puissance,

on peut reconnaître que $u_c \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(u_c^2)}{dt}$.

On obtient donc :

$$E_C = \int_0^t C \frac{d(u_c^2)}{2 dt'} dt' = \frac{1}{2} C (u_c(t))^2$$

car la tension est nulle à $t = 0$.

2. Une lampe consommant 1,0 W pendant 3,0 min consomme une énergie :

$$E_C = 1,0 \times 3,0 \times 60 = 1,8 \times 10^2 \text{ J}$$

Cette énergie était accumulée par le condensateur sous une tension maximale $u_c = 4,0$ V. D'après la

question **1d**, on a : $C = \frac{2E_C}{u_c^2} = 23$ F

Cette valeur de capacité est très élevée par rapport à des condensateurs usuels qui vont jusqu'à au mF.

51 a. Pendant la première demi-période, l'évolution de la tension aux bornes du condensateur est régie par l'équation différentielle $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = \frac{E}{RC}$ établie en utilisant les lois des circuits et la relation du condensateur.

La solution est de la forme : $u_c(t) = Ae^{-t/RC} + E$ car E est une solution particulière. La condition initiale est donnée par $u_c(0) = -E$ et on a donc $Ae^0 + E = -E$, soit $A = -2E$. La solution s'écrit donc :

$$u_c(t) = -2Ee^{-t/RC} + E = E(1 - 2e^{-t/RC}) \text{ et on a } \tau = RC.$$

b. On lit graphiquement la valeur asymptotique de la tension au cours de la charge : $E = 5,0$ V

Une période correspond à la durée d'un motif charge-décharge. On lit $T = 10$ ms.

Pendant la charge, $u_c(\tau) = E(1 - 2e^{-1}) \approx 0,26E = 1,3$ V ; on lit cette valeur sur le graphique pour $\tau = 0,2$ ms.

c. La valeur de R ayant augmenté, il en va de même pour $\tau = RC$. L'alternance entre les valeurs E et $-E$ délivrées par le générateur se produit trop rapidement pour que le condensateur effectue une charge ou une décharge complète.

d. Si τ est très grand devant T , la tension aux bornes du condensateur reste quasi nulle en permanence. On dessine donc une tension constante nulle.

e. Si la fréquence augmente, la période T diminue et devient très petite devant τ . D'après la question précédente, la tension aux bornes du condensateur semble nulle, ce qui est le comportement d'un fil électrique.

Exercice **52** corrigé à l'adresse hatier-clic.fr/pct560

53 1.1. Lors de la charge du condensateur, la tension augmente, ce qui correspond à la courbe a. L'intensité, quant à elle, diminue car de moins de moins de charges sont transférées lors de l'accumulation aux armatures, ce qui correspond à la courbe b.

1.2. Avant $t = 1,5$ ms, les deux courbes montrent une variation au cours du temps (la tension augmente, l'intensité diminue). C'est un régime transitoire. Après $t = 1,5$ ms, les deux courbes semblent constantes, ce qui correspond au régime permanent.

1.3. On utilise la méthode de la tangente à l'origine ou bien on lit graphiquement le temps au bout duquel on atteint 63 % de la tension maximale. On obtient $\tau = 1$ ns. La durée d'un choc est huit ordres de grandeur plus élevée que ce temps caractéristique de charge ! Le capteur est prêt à fonctionner presque instantanément comparé à la durée d'un choc.

1.4. L'expression littérale est $\tau = RC$ et on déduit :

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{1 \times 10^{-9}}{100 \times 10^{-12}} = 100 \Omega$$

1.5. En régime permanent, la tension est $E = 5,0$ V, ce qui correspond à une charge $q = CE = 5,0 \times 10^{-10}$ C.

2.1. L'expression **b** est cohérente avec le fait que la capacité d'un condensateur augmente quand les armatures se rapprochent.

2.2. Avant le choc : $u_C = E$ et $q = CE$

2.3. Le générateur impose sa tension au capteur indépendamment des conditions extérieures. La tension E ne varie donc pas lors du choc. En revanche, l'espace entre les armatures est diminué, ce qui

augmente la capacité du condensateur vu que $C = \frac{k}{d}$.

2.4. La charge q du condensateur augmente vu que C augmente et que E est constant. Les électrons quittent l'armature positive et vont vers l'armature négative, augmentant la charge accumulée sur chacune.

2.5. $i = \frac{dq}{dt}$

2.6. Puisque la charge électrique varie, la tension aux bornes du condensateur varie (affirmation **a** correcte).

L'intensité était nulle avant le choc (régime permanent) et prend une valeur non nulle lors de la variation de charge, ce qui rend l'affirmation **b** correcte.

En revanche, il a été précisé que la tension aux bornes du générateur ne varie pas.

54 1.1. On lit la tension initiale sur le graphique : $E = 5,5$ V

1.2. Par la méthode de la tangente ou en lisant le temps τ pour lequel $u_C(\tau) = 0,37E$, on trouve $\tau = 0,8$ s.

2.1. On note q la charge portée par l'armature A.

On a $i = \frac{dq}{dt}$ car le condensateur est en convention récepteur et $u_R = -Ri$ car le dipôle ohmique est en convention générateur.

2.2. On a $u_C = u_R$ avec $u_R = -Ri$ et en remplaçant i et utilisant la relation $q = Cu_C$, on trouve :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

2.3. u_C est régie par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. La solution est de la forme $u_C = Ae^{-t/RC}$, ce qui permet d'identifier $\tau = RC$. D'autre part, la condition initiale est telle que $u_C(t = 0) = E$ soit $Ae^0 = E$ et donc $A = E$.

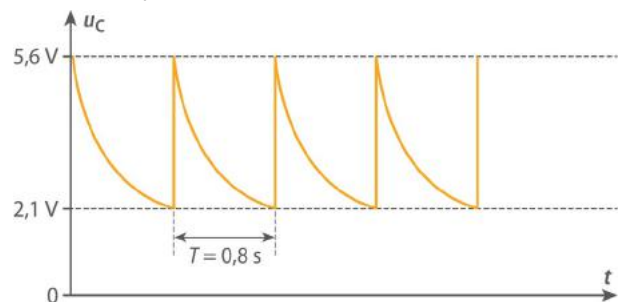
2.4. $R = \frac{\tau}{C} = \frac{0,8}{0,40 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^6 \Omega$

3.1. Vu que $u_C = u_R$ à tout instant, on cherche la valeur $u_R = e^{-1}u_C(t = 0) = e^{-1} \times 0,56 = 0,21$ V.

3.2. On cherche le temps tel que $u_C(t) = e^{-1}u_C(t = 0)$. D'après l'expression fournie, cela revient à :

$$0,56e^{-t/0,80} = 0,56e^{-1} \text{ soit } -\frac{t}{0,80} = -1 \text{ donc } t = 0,8 \text{ s.}$$

3.3. Une fois cette date atteinte, le condensateur se recharge presque instantanément car l'interrupteur bascule en position 1 où la résistance est très faible.



3.4. La fréquence des impulsions se calcule :

$$f = \frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ Hz}$$

Si l'on calcule le nombre d'impulsions pendant une minute, on trouve $1,25 \times 60 = 75$ impulsions par minute. Cela correspond à un rythme cardiaque humain moyen.