Mécanique céleste et satellites

« Les lois du mouvement des planètes sont des harmonies célestes. — Johannes Kepler, Harmonices Mundi, 1619 »

1 Orbite et période de révolution

Pour étudier le mouvement d'une planète ou d'un satellite autour d'un astre, on considère uniquement le mouvement de son centre de masse et on se place dans le référentiel lié à l'astre central.

👉 Remarque important : Le **vecteur position** part de l'origine du référentiel ; le **vecteur vitesse** et le **vecteur accélération** sont attachés au point en mouvement (le satellite).

Exemples :

Pour étudier le mouvement de la Terre autour du Soleil, on se place dans le référentiel héliocentrique.

Pour étudier le mouvement de la Lune autour de la Terre, on se place dans le référentiel géocentrique.

La **période** de révolution d'une planète (ou d'un satellite) correspond au temps mis par ce corps céleste pour faire un tour complet autour de l'astre attracteur.

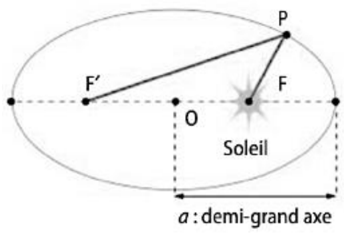
2 Les lois de Kepler

Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, Johannes Kepler (1571-1630), astronome Allemand adopte le modèle héliocentrique proposé par Nicolas Copernic. En exploitant les observations extrêmement précises de Tycho Brahé, il étudie le mouvement des planètes autour du Soleil.

Kepler constate notamment que les trajectoires de ces dernières ne sont pas circulaires. À partir de ses analyses, il établit trois lois empiriques [1] permettant de décrire le mouvement des planètes. Ces lois sont fondamentales : elles s'appliquent à tous les corps en orbite autour d'un astre attracteur.

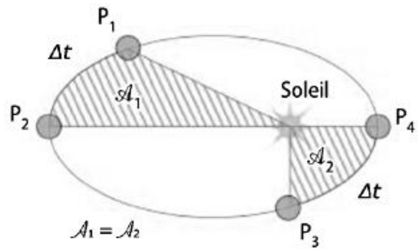
2.1 *Première loi (loi des orbitres)*

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de masse d'une planète est une ellipse, dont le Soleil occupe l'un des deux foyers.



2.2 *Deuxième loi (loi des aires)*

Le segment reliant le Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.



👉 Cela signifie que la vitesse d'une planète n'est pas constante :

- elle est maximale au **périhélie** (planète la plus proche du Soleil),
- elle est minimale à l'**aphélie** (planète la plus éloignée).

2.3 *Troisième loi (loi des périodes)*

Pour toutes les planètes du Système solaire, le rapport entre le **carré de la période de révolution** T et le **cube du demi-grand axe** a de l'orbite est constant :

$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} = \frac{4\times\pi^2}{G\times M}}$ avec T en seconde(s), a en mètre (m) et la masse M du corps attracteur en kg

👉 À retenir : Cette constante ne dépend que de la masse de l'astre attracteur.

📌 Point essentiel : Les lois de Kepler ont été établies à partir de l'étude des planètes du Système solaire, mais elles sont valables pour tout système orbital gravitationnel (planètes, satellites, exoplanètes…) autour d'un astre central.

[1] Empirique : se dit d'une loi ou d'un résultat obtenu à partir d'observations et de mesures, sans être démontré théoriquement au départ.

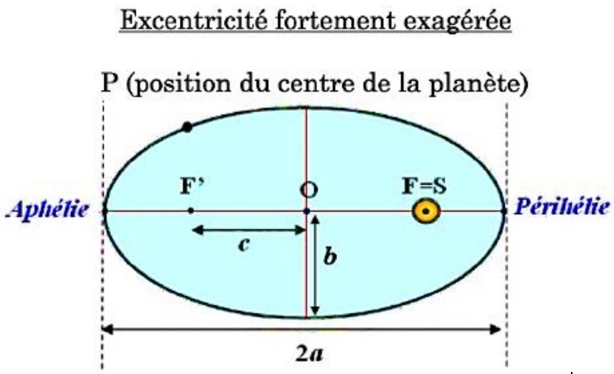
3 Approximation des trajectoires circulaires

Application 1 : excentricité des planètes

Le tableau suivant présente les caractéristiques orbitales de plusieurs astres autour du Soleil.

Nom planète	Demi-grand axe a (UA)	Demi-petit axe b (UA)	Période de révolution (années)	Excentricité e
Mercure	0,387	0,379	0,24	
Vénus	0,723	0,723	0,62	
Terre	1	0,9999	1	
Mars	1,524	1,518	1,88	
Jupiter	5,203	5,198	11,86	
Saturne	9,537	9,522	29,46	
Uranus	19,191	19,169	84,01	
Neptune	30,07	30,068	164,8	
Pluton (Planète naine)	39,482	37,8	248	
Comète de Halley	17,8	12,6	75,3	

L'unité astronomique (UA) est une unité de distance utilisée en astronomie. Elle correspond à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil, soit environ $1{,}50 \times 10^{11}$ m.



L'excentricité e est une grandeur géométrique qui permet de quantifier l'allongement d'une orbite elliptique.

Pour une ellipse : $e = \frac{c}{a}$ où : a est le demi-grand axe de l'ellipse, c est la distance entre le centre de l'ellipse et l'un des foyers, b est le demi-petit axe.

L'excentricité e d'une orbitre elliptique peut s'écrire

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

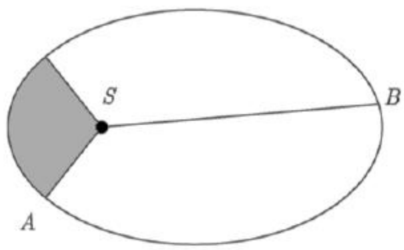
1. Quelle est l'excentricité d'un cercle qui est un cas particulier d'ellipse dont les foyers sont confondus avec le centre ?

2. Compléter la dernière colonne du tableau (excentricité).

   a. Que peut-on dire des orbites des planètes du Système solaire ?

   b. Que peut-on dire des orbites de Pluton et de la comète de Halley ?

La figure ci-contre représente un astre en orbite elliptique autour du Soleil.



La zone grisée correspond à l'aire balayée par le segment SA pendant une durée Δt.

3. Représenter sur la figure l'aire balayée par le segment SB pendant la même durée Δt.

4. Dans le cas d'une orbite circulaire, représenter sur un schéma les aires balayées par le rayon reliant le soleil à l'astre pendant une même durée Δt, en deux positions différentes de l'orbite, de façon analogue à la question précédente.

5. En utilisant la loi des aires, expliquer ce que l'on peut dire de la valeur de la vitesse d'un astre en orbite circulaire autour du Soleil, en vous appuyant sur la figure précédente.

Dans cette partie, on considère que les planètes ou les satellites décrivent des trajectoires circulaires dans le champ de gravité de l'astre attracteur (Soleil, Terre, Jupiter…) afin de simplifier l'étude du mouvement.

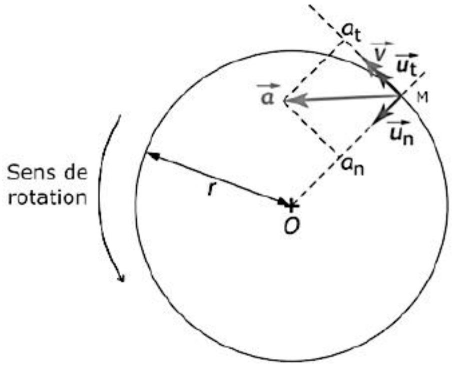
Un cercle peut être vu comme une ellipse non aplatie (d'excentricité nulle). On peut donc appliquer les lois de Kepler au cas du mouvement circulaire.

👉 D'après la loi des aires, un mouvement circulaire se fait à vitesse constante ; le mouvement est donc **circulaire uniforme**.

3.1 Description du mouvement : repère de Frenet

Repère de Frenet (repère mobile)

Le **repère de Frenet** $(M\,;\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est un repère mobile, attaché au mobile M étudié : son origine est le point en mouvement et ses axes évoluent avec la trajectoire :



- $\vec{u}_t$ est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement à chaque instant ;
- $\vec{u}_n$ est perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et orienté vers le centre de la trajectoire à chaque instant.

👉 On choisit le repère de Frenet parce qu'il permet d'obtenir des expressions plus simples des projections des vecteurs vitesse et accélération que dans le repère cartésien lié au référentiel $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours tangente à la trajectoire.

Dans le repère de Frenet , on peut donc écrire $\vec{v} = v.\,\vec{u}_t$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ se décompose selon ces deux directions :

- une composante tangentielle a_t,
- une composante normale a_n.

a_n est appelée accélération centripète : elle est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire et est **liée au changement de direction de la vitesse**.

a_t est appelée accélération tangentielle : elle est **liée à la variation de la valeur de la vitesse** : $a_t = \frac{dv}{dt}$

Cas du mouvement circulaire uniforme

Dans un mouvement circulaire uniforme :

- la vitesse est constante → $a_t = 0$;
- l'accélération est uniquement centripète, dirigée vers le centre du cercle.

Sa valeur est alors : $\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$ [2]. où : v est la vitesse du mobile et r le rayon de la trajectoire circulaire.

👉 À retenir

- mouvement circulaire uniforme → vitesse constante
- accélération dirigée vers le centre de norme $a_n = \frac{v^2}{r}$

🛰 Application 2 : coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet

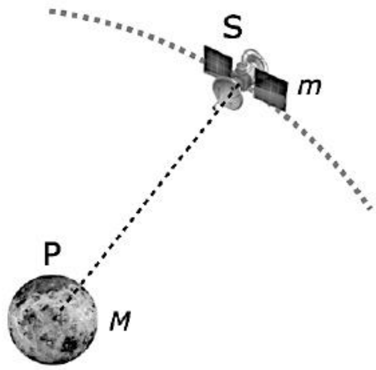
On considère un satellite M en orbite circulaire de rayon r autour d'un astre attracteur O. Sa vitesse a pour norme v. Donner les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération du satellite dans le repère de Frenet $(M\,;\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ sous forme de colonnes.

[2] Une démonstration de cette relation est disponible sur le site sciencespartout.fr.

3.2 *Origine du mouvement circulaire : approche dynamique*

Application 3 : étude d'un satellite autour d'une planète (Démonstration à pouvoir refaire)

On étudie un satellite S de masse m en orbite circulaire autour d'une planète P de masse M. Le satellite décrit un cercle de rayon R et se déplace à la vitesse v.
On se place dans le référentiel lié à la planète, supposé galiléen.



Force exercée sur le satellite

1. Identifier la **force principale** qui s'exerce sur le satellite.
2. Préciser sa **direction** et son **sens** en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}_{PS} = \frac{\overrightarrow{PS}}{\|\overrightarrow{PS}\|}$

Nature du mouvement

3. Quelle est la nature du mouvement du satellite ?
4. Quelle est la direction de son accélération ?

Application de la 2e loi de Newton

5. Écrire la **deuxième loi de Newton** appliquée au satellite.
6. Projeter cette loi selon la direction radiale (vers le centre de la trajectoire).
7. En déduire une relation entre la vitesse v, le rayon R, et la masse M de la planète.

Lien avec la période de révolution

8. Rappeler l'expression de la vitesse d'un mouvement circulaire en fonction de la période T.
9. En déduire une relation reliant T, R, G et M.

Conclusion (loi de Kepler)

10. Montrer que le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ est constant et préciser de quoi dépend cette constante.

Pour un satellite en orbite circulaire autour d'un astre attracteur de masse M, la gravitation est à l'origine du mouvement : l'accélération est centripète et la troisième loi de Kepler découle des lois de Newton.

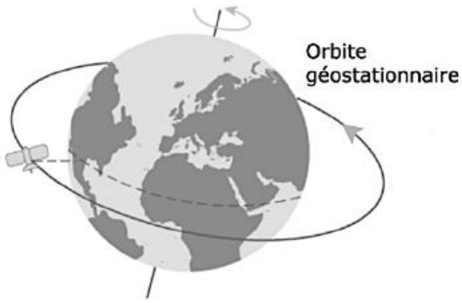
On montre (voir l'application ci-dessus) que, pour ce satellite, la relation suivante est vérifiée : $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$ où :

- T est la période de révolution du satellite,
- R est le rayon de l'orbite circulaire,
- M est la masse de l'astre attracteur,
- G est la constante gravitationnelle.

On remarque que le rapport rapport $\frac{T^2}{R^3}$ ne dépend que de la masse M de l'astre attracteur. Ce rapport est donc constant pour tous les satellites orbitant autour du même astre.
Exemples : les satellites de Jupiter, les planètes du système solaire, les exoplanètes orbitant autour d'une étoile.

4 Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est immobile dans le référentiel terrestre, c'est-à-dire fixe par rapport à la surface de la Terre. C'est le cas, par exemple, de nombreux satellites météorologiques ou de télécommunication.
Pour rester immobile par rapport à la Terre, un satellite géostationnaire doit avoir la même période de rotation que la Terre. Son orbite doit donc être située dans le plan équatorial et posséder le même axe de rotation que la Terre.



Application 4 : Satellite géostationnaire

1. En sachant de que le jour sidéral (période de rotation de la Terre sur elle-même) vaut $T_{sid} = 86\,164$ s et que la masse de la Terre vaut $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, exprimer le rayon r_{gs} de l'orbite géostationnaire.
2. En déduire la hauteur h_{gs} de l'orbite géostationnaire au-dessus du sol terrestre en sachant que le rayon de la Terre vaut $R_T = 6378$ km.

Plan de travail

QCM interactif : http://www.hatier-clic.fr/pct385

Exigences et capacités exigibles du Chapitre 9 : Mécanique céleste et satellites	Exercices + TP	Exercices Hatier [3]
Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération d'un mouvement circulaire dans un champ de gravitation.	Application 1 Application 2 Exercice 2	29 p.388 (corrigé) 31 p.390 37 et 42 p.391 50 p.393
Établir et exploiter la troisième loi de Kepler. Connaitre la première et la deuxième loi de Kepler	Application 3 TP Exercice 1 Exercice 3 Exercice 4	27 p.387 (corrigé) 29 p.388 (corrigé) 31, 34 et 36 p.390 41 et 42 p.391 47 p.392 49, 50 p.393 57 p.395 61 p.398

Exercice 1 : Satellites d'Uranus

Le tableau ci-contre regroupe les demi-grands axes a et les périodes de révolution T de quelques satellites d'Uranus. À l'aide de la troisième loi de Kepler, déterminer les données manquantes.

Satellite	Ariel	Umbriel	Titania	Obéron
a (en km)	193 020	266 300		
T (en j)	2,52		8,71	13,46

Exercice 2 : Lune

La période de révolution de la Lune autour de la Terre est T=27j 7h 43 min.

La distance entre le centre de la Lune et le centre de la Terre varie entre

$d_{min} = 3{,}567 \times 10^5$ km et $d_{max} = 4{,}063 \times 10^5$ km.

a. Schématiser le centre de la Terre T, le centre de la Lune L et représenter les deux distances citées.

b. En déduire la valeur a du demi-grand axe de l'orbite de la Lune autour de la Terre.

c. En faisant l'approximation que le mouvement de la Lune est circulaire de rayon a dans le référentiel géocentrique, déterminer la longueur de l'orbite lunaire. En déduire la vitesse de la Lune.

[3] Les exercices ne seront pas tous corrigés, mais les corrections de ceux non corrigés en classe seront mises sur Google Classroom.

Exercice 3 : Masse de la voie lactée M_G

Le Soleil et son système planétaire se trouvent dans la Voie lactée, notre galaxie. On peut considérer que le Soleil décrit une orbite circulaire autour du centre galactique, à une distance supposée constante de valeur $r = 2{,}7 \times 10^4$ années-lumière

On étudie le Soleil, de masse $m_S = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg, dans le référentiel lié au centre de la galaxie, supposé galiléen.

On supposera que la seule force gravitationnelle qui s'exerce sur le Soleil est la force exercée par le centre galactique O, considéré comme concentrant la masse M_G de la galaxie dans ce modèle simplifié.

1. Faire un schéma représentant le centre galactique O, le Soleil S, un vecteur unitaire $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OS}$ et de même sens, et la force $\vec{F}_{O/S}$.
2. À l'aide de la deuxième loi de Newton, déterminer l'expression de l'accélération du Soleil $\vec{a}_S$ dans le référentiel d'étude.
3. Rappeler l'expression de l'accélération du Soleil dans un repère de Frenet.

On ajoutera sur le schéma de la question **1.** les vecteurs unitaires de ce repère.

4. Montrer que le mouvement du Soleil est uniforme et donner l'expression de la norme de sa vitesse v_S en fonction de G, M_G et r.
5. En déduire que la période de révolution du Soleil autour du centre galactique (année galactique) s'écrit :

$$T_S = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_G}}.$$

L'année galactique vaut environ 250 millions d'années terrestres.

6. Exprimer T_S en secondes et r en mètres.
7. En déduire la masse M_G de la galaxie dans ce modèle.

On estime la masse totale de la Voie lactée à 10^{12} fois la masse du Soleil.

8. Le modèle utilisé est-il réaliste ? Sinon, citer une hypothèse du modèle qui vous paraît abusive.

Exercice 4 : Mission Rosetta *Polynésie 2019*

En 2004, la sonde européenne ROSETTA a quitté la Terre pour un voyage long de 10 ans. Sa destination était la comète 67P Churyumov-Gerasimenko, dont elle s'est approchée au cours de l'année 2014. Une fois à proximité de cette dernière, ROSETTA a été mise en orbite autour de la comète et a entamé ses observations en juillet 2014. En novembre 2014, la sonde a largué PHILAE, un atterrisseur qui est venu se poser à la surface de la comète. La mission de PHILAE consistait à analyser la comète sous tous ses aspects : composition du sol, propriétés physiques, niveau d'activité… pour mieux comprendre comment notre système solaire s'est formé.

Données :

- Constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m².kg⁻² ;
- Masse de la comète 67P : $M_C = 1{,}0 \times 10^{13}$ kg ;
- Masse du système (ROSETTA + PHILAE) : $M = 3{,}0 \times 10^3$ kg ;
- Masse de l'atterrisseur PHILAE : $M_P = 1{,}0 \times 10^2$ kg ;
- Distance moyenne Terre-Soleil : 1 unité astronomique = 1 ua = $1{,}50 \times 10^8$ km ;
- Dans cet exercice, la comète 67P est modélisée par une sphère de rayon R égal à 2,0 km.

1. Comète 67P Churyumov-Gerasimenko :

La comète 67P Churyumov-Gerasimenko a été découverte en septembre 1969. Elle tourne sur une orbite elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

La valeur de la vitesse de la comète est variable sur son orbite elliptique ; elle varie entre 5 et 35 $km.s^{-1}$ environ dans le référentiel héliocentrique.

Trajectoire autour du Soleil :

- Ellipse
- Distance au plus près du Soleil (périhélie) : 1,24 ua
- Distance au plus loin du Soleil (aphélie) : 5,68 ua
- Grand axe de l'ellipse : distance entre le périhélie et l'aphélie

1.1. Représenter la trajectoire de la comète autour du Soleil en précisant les positions du Soleil, de l'aphélie et du périhélie.

1.2. Expliquer, en utilisant une des lois de Kepler, pourquoi la vitesse de la comète n'est pas constante sur sa trajectoire. On complètera le schéma précédent pour expliciter la loi utilisée.

Préciser, sur ce même schéma, la position de la comète pour laquelle la valeur de sa vitesse est la plus grande. Justifier.

1.3. Pour tous les objets en orbite autour du Soleil, le rapport entre le carré de la période de révolution T et le cube du demi-grand axe a de l'orbite est constant : $\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{r}^3} = \mathrm{k}$, grandeur constante (troisième loi de Kepler).

En déduire la valeur de la période de révolution de la comète autour du Soleil en années.

2. Satellisation de ROSETTA

Dans cette deuxième partie, l'atterrisseur PHILAE est encore dans la sonde ROSETTA.

Au cours des mois d'août et septembre 2014, la sonde ROSETTA arrive à proximité de la comète et est mise en orbite autour de celle-ci sur une trajectoire que l'on considère circulaire à une altitude h de 20 km. La manœuvre est difficile du fait de la faible gravité qui règne autour de la comète et pour réussir cette satellisation, la vitesse doit être parfaitement ajustée. Une vitesse trop importante donnerait à ROSETTA une trajectoire elliptique, une vitesse trop faible conduirait à une collision de la sonde avec la comète.

Le référentiel d'étude dans cette partie est le référentiel dont l'origine est le centre de la comète et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines. Ce référentiel est supposé galiléen.

2.1. Faire un schéma de ROSETTA en orbite autour de la comète en précisant :

- le vecteur unitaire $\vec{u}$ orienté de ROSETTA vers le centre de la comète ;

- le vecteur modélisant la force d'interaction gravitationnelle exercée par la comète sur ROSETTA.

Donner l'expression vectorielle de cette force gravitationnelle en fonction de G, M, M_C, h, R et $\vec{u}$.

2.2. Accélération de ROSETTA.

2.2.1. En supposant que le poids de ROSETTA est égal à la force d'interaction gravitationnelle qu'elle subit, donner l'expression vectorielle de l'intensité de la pesanteur $\vec{g}$ au voisinage de la comète en fonction de G, M_C, h, R et $\vec{u}$.

2.2.2. En supposant que ROSETTA n'est soumise qu'à l'interaction gravitationnelle avec la comète 67P, établir l'expression vectorielle de l'accélération $\overrightarrow{a_R}$ de ROSETTA en fonction de G, M_C, h, R et $\vec{u}$.

2.3. Vitesse et période de rotation :

2.3.1. Montrer que dans l'approximation d'un mouvement circulaire la valeur v de la vitesse de ROSETTA a pour expression : $v = \sqrt{\frac{G.M_C}{R+h}}$.

2.3.2. Calculer la valeur v de la vitesse.

2.3.3. Combien de temps ROSETTA met-elle pour faire un tour complet de la comète ?

3. Chute de PHILAE

L'atterrisseur PHILAE s'est détaché de la sonde ROSETTA le 12 novembre 2014 pour effectuer une chute libre de 20 km sans vitesse initiale et se poser sur la comète. Cette descente a duré plusieurs heures.

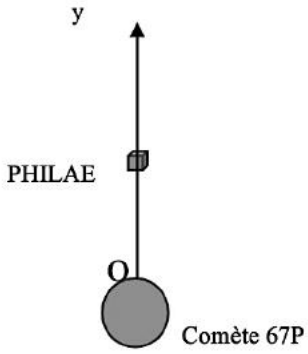
Chute libre de PHILAE

On modélise la chute de PHILAE par une chute libre, c'est-à-dire que PHILAE n'est soumis qu'à son poids.

Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

On utilise un axe (Oy) vertical dirigé vers le haut, l'origine O étant au niveau du sol de la comète.

Le champ de pesanteur de la comète est considéré uniforme, d'intensité moyenne $g = 1,5 \times 10^{-5} m.s^{-2}$.



3.1.1. Déterminer, dans l'ordre de votre choix, la durée de la descente et la vitesse à l'atterrissage.

3.1.2. Quelle serait, sur Terre, la hauteur de chute conduisant à cette même vitesse d'impact en prenant comme intensité de la pesanteur sur Terre 9,8 $m.s^{-2}$? Comment expliquer cette différence ?

3.1.3. En réalité, la durée de la chute est de 7 h.

Dans le modèle utilisé, quelles sont les hypothèses que l'on peut discuter ? Justifier.

