

Test des lois de Kepler via Python

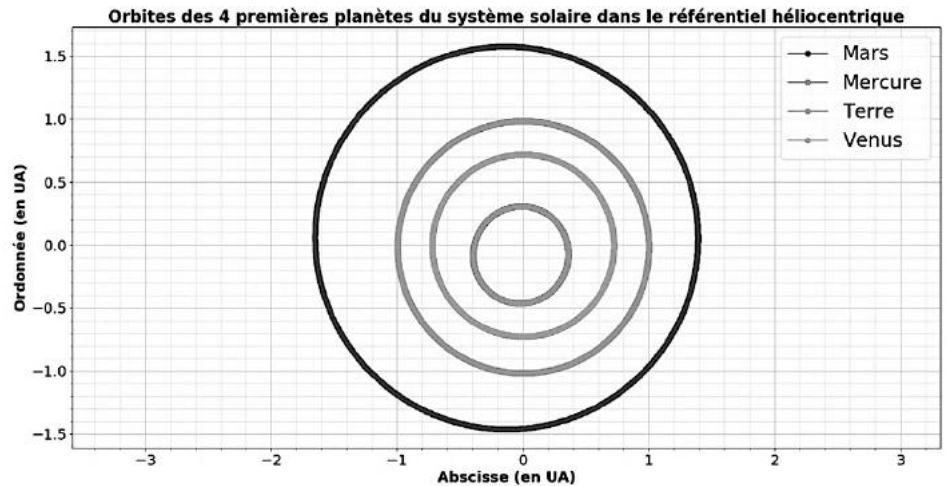
Document 1 Première loi de Kepler

Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

L'unité astronomique, notée UA, est une unité de distance utilisée en astronomie. Elle correspond approximativement à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil : 1 UA = 1,496 10⁸ km.

Afin de vérifier la première loi de Kepler, on a extrait les coordonnées x et y de quatre planètes (Mercure, Vénus, Terre et Mars) en révolution dans le référentiel héliocentrique.

Les données issues de l'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides (IMCCE), ont été analysées à l'aide d'un programme Python. Les trajectoires obtenues sont représentées ci-contre.



1. L'hypothèse d'orbites circulaires pour les planètes autour du Soleil est-elle acceptable ?

Document 2 Deuxième loi de Kepler

Calcul d'une aire balayée

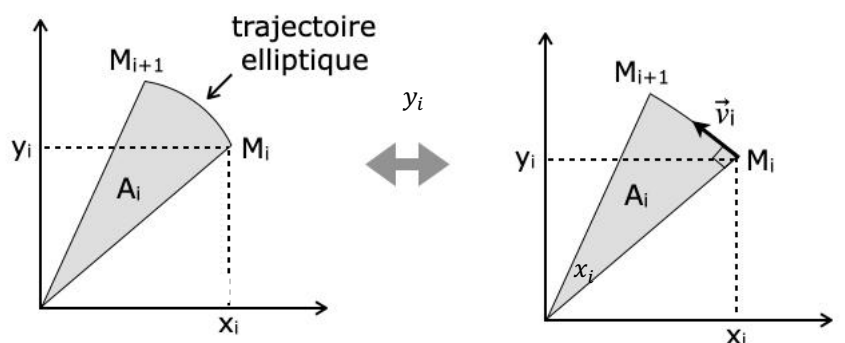
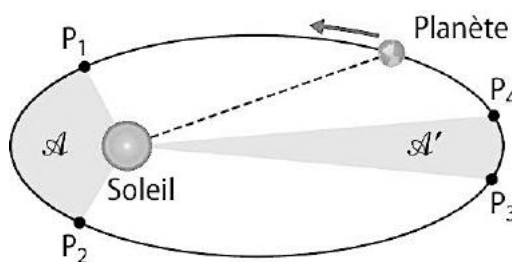
Dans le cas d'une orbite elliptique, l'aire balayée pendant un intervalle de temps très court peut être approximée par l'aire d'un triangle construit entre ces deux instants.

Sur le schéma ci-dessous, cette aire est celle du triangle OM_iM_{i+1} .

Pour estimer l'aire du triangle OM_iM_{i+1} , plusieurs méthodes sont possibles.

La méthode présentée ici utilise la norme du vecteur vitesse \vec{v}_i au point M_i . On fera l'approximation que le triangle OM_iM_{i+1} est (presque) rectangle en M_i .

Le segment reliant les centres de masse du Soleil et de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.



2. Sachant qu'entre deux positions successives de la planète, notées M_i et M_{i+1} , il s'écoule le même intervalle de temps Δt , montrer que l'aire notée A_i balayée par le rayon Soleil-planète pendant cette intervalle est donnée par :

$$A_i = \frac{1}{2} \times v_i \times \Delta t \times \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

3. Exécuter le programme « Kepler2.py » avec le fichier des données « Kepler2Mars.txt » (planète Mars) en choisissant : $i_1 = 10$, $i_2 = 150$ et $N = 20$.
Vérifier que la loi des aires est respectée, c'est-à-dire que les aires A_i balayées pendant des intervalles de temps égaux Δt sont (quasi) constantes.

Puis modifier les valeurs de i_1 , i_2 et N , relancer le programme et comparer les résultats (éventuelles variations, dispersion des A_i).

4. En appliquant la loi des aires (deuxième loi de Kepler), montrer qu'il existe la relation suivante entre les distances de la planète au soleil au périhélie $d_{perihelie}$ et à l'aphélie $d_{aphelie}$, et les vitesses orbitales minimale et maximale de la planète : $d_{aphelie} \times v_{min} = d_{perihelie} \times v_{max}$

5. Calculer les valeurs manquantes du tableau ci-dessous et justifier chaque étape du raisonnement.

Planète	Périhélie (km)	Aphélie (km)	v_{min} (km.s ⁻¹)	v_{max} (km.s ⁻¹)
Terre		152,1 x10 ⁶	29,3	30,3
Mars	206,7x10 ⁶		22,0	26,5

Document 3 Troisième loi de Kepler

On considère un astre en orbite circulaire autour d'un astre attracteur de masse M_{Astre} .

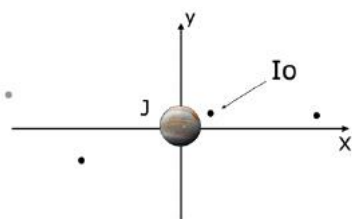
La période de révolution T et le rayon de l'orbite circulaire R de l'astre sont reliés par la relation:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_{Astre}} \text{ avec } G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ USI}$$

Document 4 Satellites de Jupiter

Les quatre satellites galiléens découverts en 1610 par Galilée à l'aide d'une lunette astronomique sont :

Satellite	Période en jours	Rayon de l'orbite en m
Io		
Europe	3,52	7,00x10 ⁸
Ganymède	7,10	1,11x10 ⁹
Callisto	16,69	1,88x10 ⁹



Visionner la [vidéo](#) montrant le mouvement des satellites galiléens de Jupiter observées par la sonde Juno en 2016.



En se plaçant dans un repère plan orthonormé (Jxy) centré sur Jupiter, les coordonnées x et y du satellite Io ont été extraites des images de la vidéo, régulièrement dans le temps et sans interruption.

- En exploitant le fichier « positions-Io.xlsx » avec Excel, déterminer la période de révolution T de Io autour de Jupiter, puis calculer le rayon R de son orbite.
- En exploitant les données orbitales des satellites de Jupiter (Io, Europe, Ganymède et Callisto), proposer une démarche de modélisation permettant de déterminer la masse de Jupiter.
La mise en œuvre pratique de cette modélisation sera réalisée à l'aide du programme Python « Kepler3.py ».
- Compléter le programme « Kepler3.py »
 - Dans la liste T (périodes en jours), ajouter la valeur de la période de Io à la position 0. (ligne 7)
 - Dans la liste a (rayons orbitaux en m), ajouter la valeur du rayon de l'orbite de Io à la position 0. (ligne 8)
 - Compléter la ligne de conversion pour obtenir une liste $T_secondes$ en secondes : plus précisément, compléter le facteur manquant après $e * \dots$ (ligne 14)
 - Compléter les lignes 20 et 21 dans la boucle `for` pour que les valeurs des abscisses x et des ordonnées y correspondent à la modélisation qu'on souhaite faire (question 7)
- Executer le programme « Kepler3.py » complété, noter les résultats de la modélisation puis en déduire la masse de Jupiter.
- La valeur connue de la masse de Jupiter est $M_J = 1,90 \times 10^{27}$ kg. La valeur expérimentale de la masse de Jupiter est-elle cohérente avec la valeur théorique ?