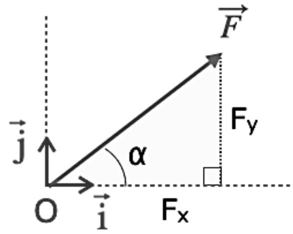
Projection des vecteurs

« Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré le triangle comme une moitié de carré ou, mieux, d'un parallélogramme: ils auraient été immédiatement conduits au vecteur, c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel. »

1- Norme d'un vecteur

Notation de la norme d'un vecteur

- Notation mathématiques de la norme d'un vecteur $\vec{F}$: $\|\vec{F}\|$
- Notation physique (souvent utilisée en mécanique) de la norme d'un vecteur $\vec{F}$: F. (F >0)



Expression vectorielle à partir de la norme

Si le vecteur $\vec{F}$ à la direction et le même sens d'un vecteur unitaire $\vec{k}$, alors on peut écrire le vecteur $\vec{F}$ en fonction de sa norme : $\vec{F} = F \times \vec{k}$

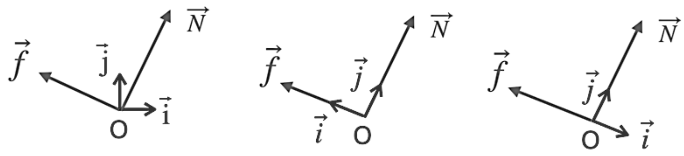
Calcul de la norme à partir des composantes

Dans le plan, si $\vec{F}$ a pour composantes (F_x, F_y), sa norme peut être déterminée à l'aide du **théorème de Pythagore** : $F^2 = {F_x}^2 + {F_y}^2 \Rightarrow F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2}$

2- Choisir les axes

Si les axes sont déjà définis, il n'y a rien à faire. Sinon, il faut choisir judicieusement les axes afin de simplifier les calculs.

Lorsque deux forces ont des directions perpendiculaires, le choix le plus efficasse consiste à orienter lex axes selon ces directions.



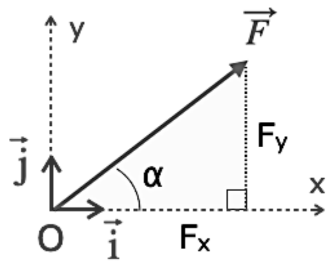
Mauvais choix Bon choix Bon choix

Exemple. Dans la situation représentée ci-dessus, si l'on choisi correctement les axes (comme sur les figures 2 ou 3), on obtient immédiatement : $\vec{N} = 0 \times \vec{i} + N \times \vec{j}$ et $\vec{f} = f \times \vec{i} + 0 \times \vec{j}$ (figure 2) ou $\vec{f} = f \times (-\vec{i}) + 0 \times \vec{j}$ (figure 3)

Remarque importante : on choisit généralement (mais pas systématiquement) les axes (Ox) et (Oy) dans le sens du mouvement. Sur les figures ci-dessus $\vec{f}$ représente la force de frottement. Cette force est toujours opposée au mouvement. Ce qui explique pourquoi, sur la figure 3, $\vec{f}$ et $\vec{i}$ sont de sens opposés : c'est précisément ce qui rend cec choix d'axes pertinent.

3- Projection de vecteur

Projeter les vecteurs sur les axes revient à trouver ses coordonnées à déterminer ses coordonnées dans le repère choisi. Vous savez déjà (normalement 😊) effectuer ce type de décomposition.



Soient F_x et F_y les coordonnées suivant les axes Ox (vecteur unitaire $\vec{i}$) et Oy (vecteur unitaire $\vec{j}$)

On peut « écrire alors $\vec{F} = F_x \times \vec{i} + F_y \times \vec{j}$ ou, sous forme de coordonnées $\vec{F}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$

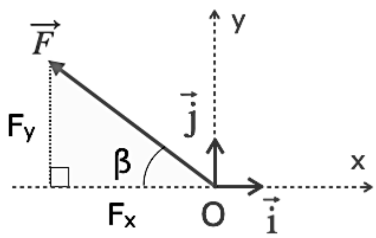
Lien avec les relations trigonométriques

À partir du triangle rectangle associé, on obtient : $\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F}$ $\sin(\alpha) = \frac{F_y}{F}$ et $\tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x}$. On en déduit $F_x = F\cos(\alpha)$ et $F_y = F\sin(\alpha)$. Ainsi, le vecteur $\vec{F}$ peut s'écrire : $\vec{F} = F\cos(\alpha) \times \vec{i} + F\sin(\alpha) \times \vec{j}$

👉 Cette écriture correspond à l'expression du vecteur à partir de sa **norme** et de son **angle** ; on parle alors de **coordonnées polaires** du vecteur $\vec{F}$.

Attention aux coordonnées négatives

Un vecteur peut avoir des coordonnées négatives lorsqu'il est orienté dans le sens opposé à celui d'un ou des vecteurs unitaires du repère ($\vec{i}$ et/ou $\vec{j}$)



On a par exemple sur le schéma ci-contre $\vec{F} = F_x \times (-\vec{i}) + F_y \times \vec{j}$

On en déduit en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle : $\cos(\beta) = \frac{F_x}{F}$ $\sin(\beta) = \frac{F_y}{F}$ que $\vec{F} = -F \times \cos(\beta) \times \vec{i} + F \times \sin(\beta) \times \vec{j}$

👉 Le **signe** des composantes dépend uniquement de l'orientation du vecteur par rapport aux axes du repère, et non de sa norme, qui reste toujours positive.

4- <u>Utilisation</u>

On traduit la première ou la deuxième loi **vectorielle** de Newton par leur équivalent en coordonnées x et y.

Pour cela, il faut :

- Etape 1 : Définir le système et le référentiel d'étude
- Etape 2 : Faire le bilan des forces sur un schéma (Si nécessaire, rassembler les différentes forces en un seul point car au lycée pour des raisons de simplification, on étudie le mouvement d'un point)
- Etape 3 : Projeter les forces sur les axes
- Etape 4 : Appliquer la 1e ou la 2e loi de Newton

<u>Rappel</u> la première loi de Newton (le principe d'inertie) :

Pour exploiter la **1re ou la 2e loi de Newton**, on traduit une relation **vectorielle** en **équations scalaires** suivant les axes x et y.

Au lycée, on modélise le système par un **point matériel** afin de simplifier l'étude.

Démarche générale (toujours la même)

1. **Définir le système** étudié et le point qui le modélise ainsi que le **référentiel** d'étude.
2. **Faire le bilan des forces**.
3. **Choisir les axes** et les vecteurs unitaires utiles et **projeter les forces** sur Ox et Oy.
4. Écrire la relation vectorielle (1re ou la 2e loi de Newton)
5. **Projeter cette relation sur les axes** pour obtenir des équations scalaires à résoudre.

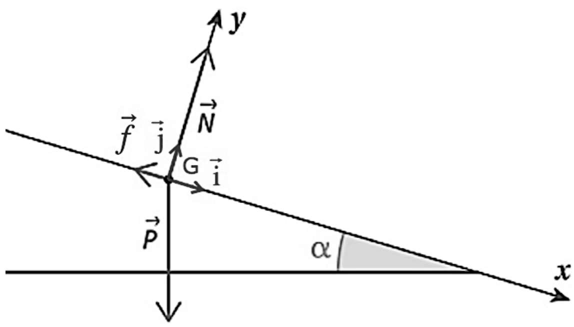
Exemple pour la **1re** loi de Newton (principe d'inertie) : $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \vec{0}$

Dans le cas de trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ *et* $\overrightarrow{F_3}$, le principe de l'inertie revient à écrire :

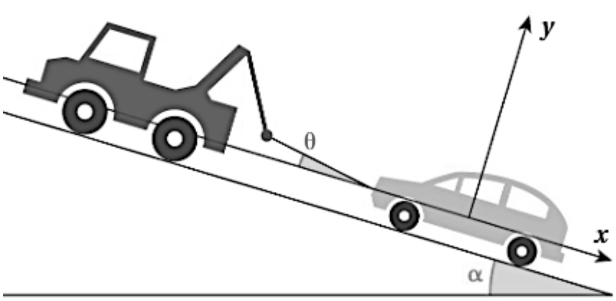
$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \text{ et } F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$$

<u>Exemple 1</u> : Une voiture de masse m = 1500 kg est tombée en panne. Elle est à l'arrêt dans une rue présentant une pente de 30%, correspondant à un angle α = 16,7°. La situation est représentée sur le schéma ci-contre.

1. Définir le système étudié et le référentiel d'étude.
2. Projeter chacune des forces sur les axes (Ox) et (Oy) et donner leurs coordonnées.
3. A l'aide de la 1e loi de Newton, déterminer les normes des forces en fonction de m et de g.



<u>Exemple 2</u> : Dans la situation précédente, une dépanneuse vient en aide à la voiture et la tracte à vitesse constante à l'aide d'un câble faisant un angle θ = 10° avec la route. La tension du câble a pour norme T = 6,60.10³ N. Les axes (Ox) et (Oy) sont imposés.



1. Nommer les quatre forces exercées sur la voiture.
2. Représenter ces forces sur le schéma ci-contre, sans souci d'échelle.
3. Projeter chacune des forces sur les axes (Ox) et (Oy) et déterminer leurs coordonnées.
4. Déterminer les normes de la réaction du support $\vec{N}$ et de la force de frottements $\vec{f}$ exercée par la route sur la voiture