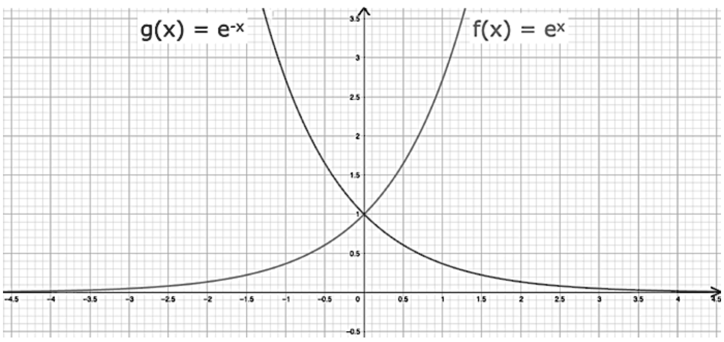
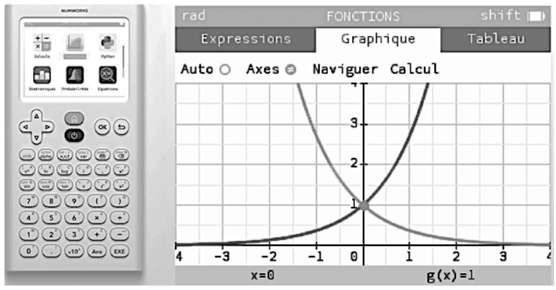
Équation différentielle

« En apprenant, on entrevoit l'étendue de notre ignorance. »

1- Allure des fonctions exponentielles





En utilisant votre calculatrice, trouver l'allure des fonctions exponentielles suivantes : e^x , e^{-x}, $2\ e^{-x}$, $-\ e^{-x}$, $1 - e^{-x}$)

2- Rappels de la notation Leibniz de dérivée

La dérivée d'une fonction f en un point x_0 correspond à la variation infinitésimale de f (notée « df ») par rapport à une variation infinitésimale de x (notée « dx ») de x autour de x_0.

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}(x = x_0)$$

	Mathématiques	Physique-chimie
Variable	x	t
Fonction	y	G
Dérivée	y'	$\frac{dG}{dt}$
Équation différentielle	$y' = ay + b$	$\frac{dG}{dt} = aG + b$

3- Équation différentielle

A. *Définition*

Soit **G(t)** une grandeur physique ou chimique qui dépend du temps **t**, et qui est **dérivable** par rapport à ce temps.

Une **équation différentielle** est une équation qui fait intervenir à la fois une grandeur **G(t)** et sa **dérivée** par rapport au temps, notée : $\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dt}}$

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** s'écrit sous la forme :
$\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a} \times \mathrm{G} + \mathrm{b}$ ①

où **a** et **b** sont deux constantes réelles **indépendantes du temps t**.

On parle d'équation du **premier ordre** car seule la dérivée première de G intervient.

L'égalité ① est **homogène en unités** :

– le membre de gauche, $\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{dt}}$, a l'unité de G divisée par des secondes ;

– le terme a × G a donc l'unité de G × s^{-1} → **l'unité de a est s^{-1}** ;

– le terme **b** doit donc aussi avoir l'unité de G × s^{-1}.

Ce type d'équation apparaît dans de nombreux phénomènes physiques ou chimiques. (voir applications 2 et 3 ci-dessous)

Exemple (refroidissement d'un objet) :

Lorsqu'un solide de température **T** est plongé dans un fluide maintenu à température constante $\mathbf{T_0}$, la température **T(t)** du solide évolue dans le temps selon la loi : $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = \alpha\ (\mathrm{T_0} - \mathrm{T})$ où **α** est une constante positive caractéristique du système (en s^{-1}).

C'est la **loi de refroidissement de Newton**, une loi classique de la thermodynamique.

B. *Résolution*

Résoudre une telle équation consiste à déterminer **la fonction** G(t) qui vérifie cette égalité pour tout instant t.

Théorème : l'équation $\frac{dG}{dt} = a \times G + b$ a pour solution $G(t) = c \times e^{a \times t} - \frac{b}{a}$ où c est une constante réelle.

Cette constante c se détermine à partir de la **condition initiale**.

Application 1 : Equation différentielle

On considère l'équation différentielle : $\frac{dG}{dt} = a \times G + b$

1 – Montrer que la fonction $G(t) = c \times e^{a \times t} - \frac{b}{a}$ est solution de cette équation différentielle

2 – On note G_0 la valeur de G à l'instant t = 0 . Exprimer la constante c en fonction de G_0 , a et b

3 – Donner la solution de l'équation différentielle : $\frac{dG}{dt} + 5 \times G = 0$ sachant la condition initiale est : G(0) = 3

4 – Consiérons maintenant l'équation $2 \times \frac{dG}{dt} - 8 \times G = 5$.

a) La mettre sous la forme canonique : $\frac{dG}{dt} = a \times G + b$ et déterminer les constantes a et b.

b) Résoudre ensuite cette équation différentielle.

Application 2 : Loi thermique de Newton (thermodynamique)

Lorsqu'un solide de température T_i est plongé dans un fluide à température constante T_0, sa température T(t) évolue dans le temps selon la l'équation différtentielle : $\frac{dT}{dt} = \alpha\,(T_0 - T)$ où α est une constante positive caractéristique du système (en s^{-1}).

Cela signifie que la variation de température est proportionnelle à l'écart entre la température du solide et celle du fluide.

1 - Résoudre cette équation pour obtenir l'expression de T(t) en fonction de temps, de la température initiale (température à t = 0) T_i, de la température du fluide T_0, et du coefficient α.

2 - À partir de l'expression obtenue, déterminer la température du solide :

– à l'instant initial (t = 0) ;

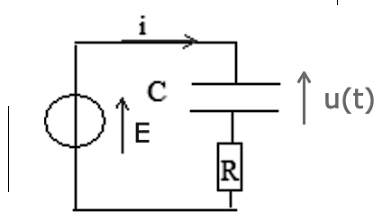
– lorsque $t \rightarrow +\infty$ (après une durée très longue)

3 - Représenter graphiquement l'allure de la courbe T(t), c'est-à-dire l'évolution de la température du solide en fonction du temps.

Application 3 : Loi de charge d'un condensateur

Lors de la charge d'un condensateur de capacité C par un générateur de tension E, la tension u(t) aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u = \frac{E}{RC}$$



où E, R et C sont des constantes indépendantes du temps.

Déterminer l'expression de u(t), en tenant compte de la condition initiale : u(0) = 0.