Dérivée d'une fonction – notation de Leibniz

« Pas de science sans patience. »

1 - Taux de variation moyen

Une **variation** mesurable d'une grandeur G, à l'échelle macroscopique, est notée en précédant son symbole de la lettre grecque delta « Δ ».

La variation d'une grandeur correspond toujours à la valeur finale moins la valeur initiale :

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{G}_{\mathbf{final}} - \mathbf{G}_{\mathbf{initial}}$$

Le **taux de variation moyen** de la grandeur G(t) entre t et t+Δt est le rapport : $\frac{\Delta G(t)}{\Delta t} = \frac{G(t+\Delta t)-G(t)}{\Delta t}$

Application 1 : taux de variation moyen de la position = vitesse moyenne
Éloïse consulte son téléphone pour connaître le temps de trajet en tram jusqu'à la place de la Comédie : 26 minutes pour 13,8 km. Quelle est la vitesse moyenne du tram sur ce parcours, en $m.s^{-1}$?

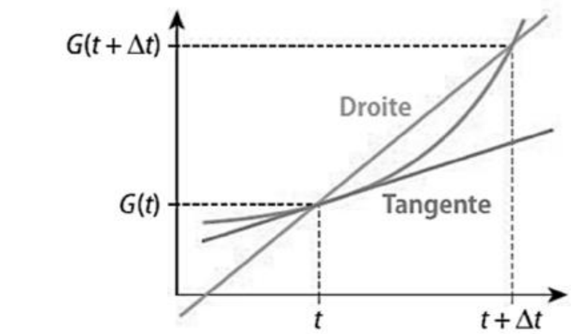
2 - Taux de variation instantanné et dérivée

Plus on réduit la durée Δt, plus le taux de variation s'approche du **taux instantané**, c'est-à-dire de la **dérivée**.

À la limite, on a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta t}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{G(t+\Delta t)-G(t)}{\Delta t} = G'(t)$

Cette expression est à rapprocher de la notation de la dérivée utilisée en mathématiques avec un « prime »

Interprétation graphique



• Le taux de variation est le **coefficient directeur** de la droite passant par les points de dates t et t + Δt.
• Lorsque Δt tend vers zéro, la droite en haut se rapproche de la droite **tangente**, en bas.
• La dérivée est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point de date t.

3 - Notation de Leibniz de la dérivée

La notation de Leibniz pour la dérivée est plus générale que la notation « prime » (ex. f'(t)) utilisée en terminale.

Elle repose sur l'idée de variations infinitésimales : au lieu d'utiliser le symbole Δ pour une variation mesurable, on utilise une lettre « d » minuscule pour désigner une **variation infiniment petite**.

Par exemple, une variation infinitésimale de temps se note **dt**, et celle d'une grandeur G se note **dG**.

Remarque : comme pour ΔG, on ne peut pas séparer d de G dans l'écriture dG.

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G(t)}{\Delta t} = \frac{dG(t)}{dt} = \text{« dérivée de G en fonction de t » en physique}}$$

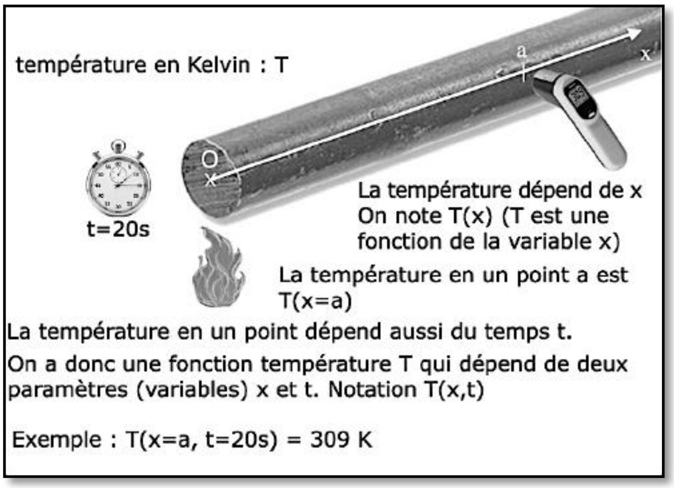
Avantages de la notation de Leibniz :

- Elle **montre visuellement** qu'une dérivée est un **taux de variation infinitésimale**.
- Elle **indique clairement la variable par rapport à laquelle on dérive**, ce qui est essentiel lorsque la fonction dépend de plusieurs variables.

Dans l'enseignement supérieur, on rencontre des fonctions qui dépendent de **plusieurs variables** : x_1, x_2, etc...

Dans ce cas, la **notation « prime »** (f'(x)) devient insuffisante : on doit préciser la variable de dérivation, ce que permet la **notation de Leibniz** (ex. $\frac{dT}{dt}$, $\frac{dT}{dx}$).

Exemple en physique :



On chauffe une barre de fer. La **température** T mesurée dépend :

- de la **position** x du point de mesure sur la barre,

- et du **temps** t écoulé depuis le début du chauffage.

On a donc une fonction à deux variables : T = T(x, t)

Par exemple, si on mesure la température au point x = a et à t = 20 s, on peut écrire :

T(x = a, t = 20 s) = 309 K

On peut alors s'intéresser :

- à la **variation de la température dans l'espace** → $\frac{dT}{dx}$
- ou à la **variation de la température dans le temps** → $\frac{dT}{dt}$

C'est pourquoi, en physique, on **privilégie la notation de Leibniz**, plus rigoureuse et adaptée à ces situations.

✏️ Application 2 : cinétique chimique - vitesse de disparition d'une espèce dans une réaction
La concentration d'une espèce dans un bécher évolue au cours du temps selon la loi c(t) = $\frac{C_0}{1 + k\,t}$
pour t ∈ [0 ; +∞[avec C_0 = 1,0 mol.L^{-1} et k une constante de valeur k = 0,10 s^{-1}.
La vitesse volumique de disparition de cette espèce chimique à la date t a pour *expression* $V_D(t) = -\frac{dC}{dt}(t)$, elle est exprimée en mol.L^{-1}.s^{-1}. Déterminer la vitesse volumique d'apparition à la date t = 10s.

Résumé

Math (en terminale)	*Physique (en terminale)* *Math (supérieur)*
variable x	grandeurs qui varient t, x, …
fonction $y = f(x)$	grandeurs que l'on observe ou mesure en fonction d'une grandeur qui varie vitesse(t), position(t)
dérivée de f au point x=a f'(x=a)	$\frac{dT}{dx}(x = a)$ On explicite par rapport à quelle variable on dérive $\frac{dT}{dt}(t = 20s)$
Le signe de f'(x=a) permet de déterminer si la fonction est croissante, décroissante ou constante au point a quand x augmente.	Le signe de $\frac{dT}{dx}(x = a)$ permet de déterminer si la température augmente, diminue ou est constante au point a quand x augmente.